Kozák Imre – Szeidl György

TENZORSZÁMÍTÁS INDEXES JELÖLÉSMÓDBAN

Második, bővített kiadás

MISKOLC
2013

Kozák Imre – Szeidl György

TENZORSZÁMÍTÁS INDEXES JELÖLÉSMÓDBAN

Második, bővített kiadás

MISKOLC
2013

ISBN 978-963-08-6427-5
©Magánkiadás 2013 – Kozák Imre, Szeidl György
Miskolci Egyetem, Mechanikai Tanszék, 3515 Miskolc-Egyetemváros

(A mű szabadon letölthető egy példányban. A letöltött szövegfájl egy példányban nyomtatható. Tilos a könyv sokszorosítása és pénzért való terjesztése. A szöveg és annak részei csak a szerzők előzetes hozzájárulásával használhatók fel más dokumentumokban.)

Tartalomjegyzék

1. fejezet. Alapfogalmak 1
1.1. Vektorok (ismétlő áttekintés) 1
1.1.1. Vektoralgebrai összefoglaló. 1
1.1.2. Lineárisan összefüggő, lineárisan független vektorok. 2
1.1.3. Vektor tetszőleges (ferdeszögű) bázisban. 4
1.2. Koordináta-rendszerek 5
1.2.1. Ferdeszögű KR-ek (általánosítás). 5
1.2.2. A bázisvektorok további tulajdonságai. 6
1.2.3. A permutációs szimbólum, vektoriális és vegyes szorzatok. 7
1.2.4. Permutációs szimbólumok szorzatai. 9
1.2.5. Görbevonalú koordináta-rendszerek. 10
Gyakorlatok 12

2. fejezet. Az indexes jelölési mód alapjai 15
2.1. Műveletek indexes mennyiségekkel 15
2.1.1. Objektumok, sokaságok. 15
2.1.2. Vektorok koordinátái, indexemelés és süllyesztés. 17
2.1.3. Műveletek vektorok között. 18
Gyakorlatok 21

3. fejezet. A determináns 23
3.1. A determináns és az adjungált 23
3.1.1. Determináns indexes jelöléssel. 23
3.1.2. Az adjungált és az inverz. 24
3.2. Alkalmazások 25
3.2.1. Determinánsok szorzástétele. 25
3.2.2. A bázisvektorok vegyes szorzata és a metrikus tenzor determinánsa. 26
3.2.3. A permutációs szimbólum, mint determináns. 26
Gyakorlatok 27

4. fejezet. Tenzorok 29
4.1. A másodrendű tenzor 29
4.1.1. A másodrendű tenzor geometriai fogalma. 29
4.1.2. Másodrendű tenzor lokális bázisban. 30
4.2. Tenzorok transzformációja 31
4.2.1. A kovariáns bázisvektorok transzformációja. 31
4.2.2. Összefüggés a transzformációs objektumok között. 33
4.2.3. A kontravariáns bázisvektorok transzformációja. 34
4.2.4. Vektorok transzformációja. 35
4.2.5. Másodrendű tenzorok transzformációja. 36
4.2.6. Tenzorok szorzatainak transzformációja. 37
Gyakorlatok 37

5. fejezet. A tenzorfogalom általánosítása 39
5.1. Tenzorok értelmezése indexes jelölésmódban 39
5.1.1. Valódi tenzorok. 39
5.1.2. Tenzorok-e a korábban megismert objektumok. 40
5.2. Műveletek tenzorok között 42
5.2.1. Additív műveletek és jelölésbeli megállapodások. 42
5.2.2. Skaláris és diádikus szorzatok. 43
5.3. Fizikai koordináták 45
5.3.1. Vektorok fizikai koordinátái. 45
5.3.2. Másodrendű tenzorok fizikai koordinátái. 46
Gyakorlatok 46

6. fejezet. Másodrendű tenzorok 49
6.1. Másodrendű tenzorok egyes kérdései 49
6.1.1. A tenzor transzponáltja. 49
6.1.2. Szimmetrikus és ferdeszimmetrikus tenzorok. Felbontási tétel. 50
6.1.3. A vektorinvariáns. 52
6.1.4. Jellegzetes mennyiségek. 53
6.1.5. A másodrendű tenzor inverze. 54
6.2. Másodrendű tenzorok sajátértékfeladata 55
6.2.1. A feladat megfogalmazása. 55
6.2.2. A főirányok számítása a gyökök ismeretében. 57
6.2.3. A főtengelytétel. 60
6.2.4. A karakterisztikus polinom együtthatói, skalárinvariánsok. 62
6.3. Hatványozás, tenzorpolinomok, deviátortenzor 64
6.3.1. Másodrendű tenzorok egész kitevős hatványai. Gyökvonás. 64
6.3.2. A Cayley-Hamilton tétel. 65
6.3.3. Tenzorpolinomok. 66
6.3.4. Azonos karakterisztikus terű tenzorok. 66
6.3.5. Deviátortenzor és gömbi tenzor. 67
Gyakorlatok 68

7. fejezet. Speciális tenzorok 71
7.1. Ortogonális tenzorok 71
7.1.1. Az ortogonális tenzor fogalma. 71
7.1.2. Az ortogonális tenzorhoz tartozó leképezés. 71
7.1.3. Ortogonális tenzorok előállítása. 74
7.2. A véges forgatás tenzorai 75
7.2.1. A véges forgatás tenzorának geometriai előállítása. 75
7.2.2. Ortogonális-e a véges forgatás tenzora. 76
7.2.3. A poláris felbontási tétel. 78
Gyakorlatok 80

8. fejezet. Tenzorok analízisének elemei 83
8.1. Deriválások görbevonalú KR-ben 83
8.1.1. Bázisvektorok analízise. 83
8.1.2. Tenzorok-e a Christoffel szimbólumok. 85
8.2. Tenzormezők deriváltjai 86
8.2.1. A deriváltak értelmezése. 86
8.2.2. Gradiens, divergencia, rotáció. 87
8.3. Kovariáns derivált 88

8.3.1. Vektormező gradiense és divergenciája görbevonalú KR-ben. 88
8.3.2. Tenzor gradiense és divergenciája görbevonalú KR-ben. 89
8.3.3. A metrikus és epszilon tenzorok kovariáns deriváltjai. 90
8.3.4. Vektormező rotációja. A Laplace operátor. 91
8.4. A Riemann-Christoffel-féle görbületi tenzor 91
8.4.1. A deriválások sorrendje. 91
8.4.2. A Riemann-Christoffel tenzor tulajdonságai. 92
8.5. Görbe menti kovariáns derivált 93
8.5.1. A derivált értelmezése. 93
8.5.2. A térgörbe geometriájának elemei. 95
Gyakorlatok 98

9. fejezet. A felületek differenciál-geometriájának alapjai 99
9.1. A felület geometriája 99
9.1.1. Görbevonalú KR a felületen és a felület környezetében. 99
9.1.2. Christoffel szimbólumok. 102
9.1.3. Felületi tenzorok. 104
9.2. A felület belső geometriája 106
9.2.1. Meusnier tétele. 106
9.2.2. Görbületi tenzor. 109
9.3. Kovariáns deriválás a felületen 114
9.3.1. Felületi menti és felületi kovariáns derivált. 114
9.3.2. Riemann-Christoffel görbületi tenzor az S felület kétméretű terében. 118

10. fejezet. Integrálátalakítási tételek és parciális integrálás 123
10.1. Integrálátalakítási tételek 123
10.1.1. Bevezető megjegyzések. 123
10.1.2. Stokes tétele. 123
10.1.3. Green tétele. 126
10.1.4. A Green és Stokes tételek általánosításai. 127
10.1.5. A Gauss-Osztrogradszkij tétel. 128
10.2. Parciális integrálás 129
10.2.1. Parciális integrálások felületen. 129
10.2.2. Parciális integrálás térfogati tartományon. 129

A függelék. Térbeli felületekre épített koordinátarendszerek 131
A.1. Hengerfelületre épített koordinátarendszer 131
A.2. Gömbfelületre épített koordinátarendszer 133
A.3. Kúpfelületre épített koordinátarendszer 136
A.4. Tóruszfelületre épített koordinátarendszer 139
A.5. Forgásfelületre épített koordinátarendszer 142

B függelék. A gyakorlatok megoldásai 149
B.1. 1. Fejezet 149
B.2. 2. Fejezet 150
B.3. 3. Fejezet 152
B.4. 4. Fejezet 152
B.5. 5. Fejezet 153
B.6. 6. Fejezet 156
B.7. 7. Fejezet 162
B.8. 8. Fejezet 169

Irodalomjegyzék 173

ELŐSZÓ a második kiadáshoz

A jelen elektronikus formában kiadott könyv (továbbiakban könyv) a Miskolci Egyetem egyetemi szintű gépészmérnök képzésében előadott Kontinuummechanika című tantárgy első félévének anyagát öleli fel és nagyban támaszkodik azokra a kontinuummechanikai előadásokra, amelyeket az első szerző két évtizeden át tartott az alkalmazott mechanikai ágazat, majd pedig a gépek és szerkezetek mechanikája szakirány hallgatói részére. A könyvben bemutatott tananyag a fontosabb jelölések formalizmusa tekintetében teljes mértékben igazodik az **[5]** tankönyv jelölésrendszeréhez (ennek átdolgozott és bővített kiadása angol nyelven jelent meg: **[6]**). A jelen könyv a kétlépcsős képzésben a második lépcsőhöz tartozó MSc hallgatók azon körét segíti tanulmányaiban, akiknek alkalmazott mechanika a szakiránya és így természetszerűen tanulják a szilárd testek kontinuummechanikáját. A könyvet a doktori tanulmányokat folytató hallgatók is haszonnal forgathatják.

A feltételezett előismereteket a mérnökhallgatók matematikai ismeretei alkotják. A könyv ennek alapulvételével tekinti át a tenzorszámítás legfontosabb elemeit. Elvben kétfajta tárgyalásmód lehetséges: (a) az invariáns, vagy más néven szimbolikus vagy direkt tárgyalásmód, illetve (b) az indexes jelölésrendszer alkalmazása a bemutatásra kerülő tenzoriális mennyiségek tárgyalása során. Az utóbbi megközelítés feltételezi az indexes jelölésmód mennyiségeinek és jelölésbeli konvencióinak alapos ismeretét – ezek részletes bemutatása is feladata tehát a könyvnek.

Megjegyezzük, hogy mindkét tárgyalásmódnak megvannak a maga előnyei, illetve hátrányai. A szimbolikus írásmód előnye, hogy a vizsgálat tárgyát képező egyenletek jobban áttekinthetők szerkezetüket és jelentésüket is tekintve. Ugyanakkor előnye és hátránya is, hogy koordináta-rendszertől független, továbbá nagyobb figyelem szükséges a tenzoriális mennyiségek közötti algebrai műveletek megértéséhez. Az indexes jelölésmód előnye, hogy a tekintett (egyébként tetszőleges) görbevonalú koordináta-rendszerben (ez speciális esetben természetesen egyenesvonalú is lehet) rögtön megkapjuk a vizsgálat tárgyát képező probléma skaláris alakú egyenleteit. Ugyanakkor talán kevésbé elegánsan látszik a fizikai egyenletek invariáns (koordináta-rendszer független) volta.

Az indexes jelölésrendszer kiválasztásánál az a körülmény játszotta a legfontosabb szerepet, hogy ebben a jelölésmódban azonnal adódnak a tekintett probléma skaláris egyenletei. Úgy véltük, hogy ez a körülmény önmagában is olyan előny a lehetséges alkalmazói kört tekintve, hogy emiatt eleve az indexes jelölésrendszert érdemes alkalmazni a tenzorszámítás egyes kérdésköreinek megtárgyalása során.

Megemlítjük, hogy ahol fontosnak véltük, ott kiírtuk a vizsgálat tárgyát képző egyenletek szimbolikus alakját is.

Az első nyolc fejezet mindenki számára fontos anyagot tartalmaz. A kilencedik fejezet a felületek differenciál-geometriájával foglalkozik. Ezt azoknak érdemes elsősorban elolvasni, akik héjelmélettel is foglalkoznak későbbi tanulmányaik során. Ismertes ugyanis, hogy a modern héjelméleti tankönyveket többnyire indexes jelölésmódban írják meg. Az utolsó fejezet a tenzoranalízis néhány tételét ismerteti tömören. Az új A. Függelék jellegzetes felületek estére közli a differenciálgeometria alapvető összefüggéseit.

Az egyes fejezetek végén különböző nehézségű feladatok találhatók. A jelen második kiadásban bővítettük a fejezetvégi feladatok számát. Az új B. Függelék közli valamennyi feladat megoldását. Korrigáltuk emellett az időközben fellelt szedési hibákat is.

Miskolc, 2013. március 22. Kozák Imre és Szeidl György

1. FEJEZET

Alapfogalmak

1.1. Vektorok (ismétlő áttekintés)

1.1.1. Vektoralgebrai összefoglaló. A vektort (geometriailag) irányított egyenesszakasznak tekintjük.

Tulajdonságai:

- nagyság (avagy abszolút érték),
- irány (ezt a vektor un. tartóegyenese, hatásvonala határozza meg),
- irányítás (ez azt mondja meg merre mutat tartóegyenesén a vektor),
- mértékegység (a vektorok jelentése általában valamilyen fizikai vagy geometriai mennyiség)

A nullvektornak vagy zérusvektornak az a jellemzője hogy zérus az abszolút értéke.

Az egységvektor egységnyi abszolút értékű vektor.

Az alábbiak, csak jelölésben, tehát a vonatkozó műveletek értelmezésének elhagyásával tekintik át a vektorok közötti műveleteket:

- additív műveltek, összeadás, kivonás pl:

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{c}\,;$$

- szorzás skalárral:

$$\mu\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}=\mathbf{c}\,;$$

- két vektor skaláris szorzata:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}=\mathbf{c}$$

(pont a művelet jele);

- vektoriális szorzás:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-\mathbf{b}\times\mathbf{a}=\mathbf{c}\,;$$

- diádikus vagy tenzoriális szorzás:

$$\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}\,,\qquad(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})^T=\mathbf{b}\otimes\mathbf{a} \tag{1.1}$$

ahol ^{T} a transzponált jelölése (diádok összegének transzponáltja az egyes diádok transzponáltjainak összege) – maga a diádikus szorzat a

$$\mathbf{ab}\qquad(\mathbf{ab})^T=\mathbf{ba}$$

alakban, azaz külön műveleti jel nélkül is szedhető, de a $\circ$ szimbólum is lehet műveleti jel (a jelen munka mindig a $\otimes$ szimbólumot használja majd műveleti jelként);

- három vektor vegyes szorzata:

$$\begin{aligned}[\mathbf{abc}]&=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\\&=(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{a}=\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\\&=(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\,;\end{aligned} \tag{1.2}$$

– kétszeres vektoriális szorzat, kifejtési tétel :

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}\,, \tag{1.3a}$$

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{a}\,; \tag{1.3b}$$

– diádikus szorzat és vektor skaláris szorzata :

$$(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\,, \tag{1.4a}$$

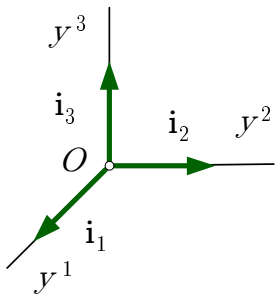
$$\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})=(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})\mathbf{b} \tag{1.4b}$$

(nem mindegy, hogy a diádot jobbról vagy balról szorozzuk skalárisan a vektorral!).

– diádikus szorzat és vektor vektoriális szorzata:

$$(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\mathbf{a}\otimes(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\,, \tag{1.5a}$$

$$\mathbf{c}\times(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})=(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\otimes\mathbf{b}\,. \tag{1.5b}$$



1.1. ábra. Kartéziuszi KR

Ha kartéziuszi KR-t alkalmazunk a vektorokkal, tenzorokkal kapcsolatos műveletek végrehajtása során, akkor – összhangban az ábrával és eltérően a gyakorta használatos

x, y és z a koordináta-tengelyek,
$\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ és $\mathbf{e}_z$ a koordináta-tengelyek pozitív irányába mutató három egységvektor

jelölésektől

y^1, y^2 és y^3 jelöli a három koordináta-tengelyt, és
$\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$ és $\mathbf{i}_3$ az 1, 2 és 3 jelű koordináta-tengelyek pozitív irányába mutató egységvektor.

Indexes jelölésmódban a mennyiségeket (ezeket valamilyen betű jelöli) indexekkel látjuk el. Megjegyezzük a későbbiek kedvéért, hogy *valamely egyindexes mennyiség felső indexes értéke általában nem egyezik meg ugyanezen mennyiség alsó indexes értékével.*

1.1.2. Lineárisan összefüggő, lineárisan független vektorok. Lineárisan függetlenek az $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n;\quad n\geq 2\quad |\mathbf{a}_i|>0\quad i=1,\ldots,n$ vektorok , ha a

$$p_1\mathbf{a}_1+p_2\mathbf{a}_2+\ldots+p_n\mathbf{a}_n=0$$

egyenletnek csak triviális megoldása van, azaz ha

$$p_1=p_2=\ldots=p_n=0\,.$$

Lineárisan összefüggőek az $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n;\quad n\geq 2\quad |\mathbf{a}_i|>0\quad i=1,\ldots,n$ vektorok, ha létezik legalább két zérustól különböző p_i.

Az alábbiakban sorra vesszük két, három és háromnál több vektor esetén a lineáris függetlenség (összefüggőség) eseteit:

Két vektor: Két párhuzamos vektor esetén, amint az azonnal látható a

$$p_1\mathbf{a}_1+p_2\mathbf{a}_2=0\qquad|\cdot\mathbf{a}_1$$

egyenletből az $\mathbf{a}_1$-el történő szorzás után, lineárisan összefüggőek a vektorok, hiszen ekkor

$$p_1=-p_2\frac{\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{a}_1}{\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_1}\,.$$

Az utóbbi képlet azt is mutatja, hogy végtelen sok a megoldások száma.

Ha nem párhuzamosak a vektorok akkor az

$$p_1\mathbf{a}_1+p_2\mathbf{a}_2=0\qquad|\times\mathbf{a}_2$$

egyenletből az $\mathbf{a}_2$ vektorral jobbról történő szorzás után az

$$p_1 \underbrace{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}_{\neq \mathbf{0}} = 0$$

eredményt kapjuk, ahonnan azonnal következik, hogy

$$p_1 = 0\,,$$

hiszen zérustól különböző az $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$ vektorszorzat.

Ugyanígy adódik az $\mathbf{a}_1$ vektorral balról történő vektoriális szorzással, hogy $p_1 = 0$.

Következésképp két nem párhuzamos vektor mindig lineárisan független.

Ha lineárisan függetlenek az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ vektorok, akkor bármely az $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ által kifeszített síkkal párhuzamos vektor kifejezhető az $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ lineáris kombinációjaként: azt mondjuk, hogy síkbeli bázist alkotnak az $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ vektorok.

Három vektor: Ha a három vektor komplanáris (egy síkban van), akkor

$$[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3] = 0$$

és a három vektor lineárisan összefüggő. Valóban,

(a) ha nem párhuzamosak, akkor azért, mert bármelyik megadható megadható a másik kettő lineáris kombinációjaként;
(b) ha kettő párhuzamos, akkor azért, mert ez a kettő lineárisan összefüggő;
(c) ha mindhárom párhuzamos, akkor pedig azért, mert a (b) szerint van közöttük két lineárisan összefüggő vektor.

Ha a három vektor nem komplanáris (nincs egy síkban), akkor

$$[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3] = a_o \neq 0$$

következőleg a

$$p_1\mathbf{a}_1 + p_2\mathbf{a}_2 + p_3\mathbf{a}_3 = 0 \qquad \cdot \begin{cases} \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \end{cases}$$

szorzatokból a

$$p_1[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3] = 0 \qquad p_2[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3] = 0 \qquad p_3[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3] = 0$$

vagy ami ugyanaz a

$$p_1 = 0 \qquad p_2 = 0 \qquad p_3 = 0$$

eredményt kapjuk. Eszerint a három vektor lineárisan független.

Négy vagy több vektor: Először négy vektort tekintünk.

(a) Ha kettő párhuzamos, vagy három egy síkban van, akkor az előzőek alapján lineárisan összefüggőek a vektorok.
(b) Tegyük fel, hogy három vektor, mondjuk az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2,$ és $\mathbf{a}_3$ nem komplanáris. Az

$$p_1\mathbf{a}_1 + p_2\mathbf{a}_2 + p_3\mathbf{a}_3 + p_4\mathbf{a}_4 = 0 \qquad \cdot \begin{cases} \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \end{cases} \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{m} & \mathrm{n} & \mathrm{i} \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}$$

szorzatokból, tekintettel a képletsor jobboldalán álló táblázatra, illetve az m, n és i betűk táblázattal definiált értelmezésére a

$$p_i[\mathbf{a}_1\,\mathbf{a}_2\,\mathbf{a}_3] + p_4[\mathbf{a}_4\mathbf{a}_m\mathbf{a}_n] = 0 \qquad i = 1{,}2{,}3$$

eredmény következik. Mivel az $\mathbf{a}_4$ nem lehet egyidejűleg az

$\mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3$
$\mathbf{a}_3\ \mathbf{a}_1$ által kifeszített síkokban
$\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2$

a fenti egyenletek közül legalább egynek van nem triviális megoldása. Négy vektor tehát mindig lineárisan összefüggő. Ez egyben azt is jelenti, hogy a négynél több vektor is mindig lineárisan összefüggő.

Tegyük fel, hogy $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2,$ és $\mathbf{a}_3$ nem komplanáris, azaz $[\mathbf{a}_1\,\mathbf{a}_2\,\mathbf{a}_3] = a_o \neq 0$. Ekkor, fennáll a fentiek alapján a

$$\mathbf{a}_4 = \underbrace{-\frac{p_1}{p_4}}_{\lambda_1}\mathbf{a}_1 \underbrace{-\frac{p_2}{p_4}}_{\lambda_2}\mathbf{a}_2 \underbrace{-\frac{p_3}{p_4}}_{\lambda_3}\mathbf{a}_2 = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \lambda_3\mathbf{a}_3$$

egyenlet. Az egyenlet szerint tetszőleges $\mathbf{a}_4$ vektor kifejezhető a nem komplanáris $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2,$ és $\mathbf{a}_3$ vektorok segítségével. A nem komplanáris $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2,$ és $\mathbf{a}_3$ vektorok tehát az euklideszi tér egy bázisát alkotják.

1.1.3. Vektor tetszőleges (ferdeszögű) bázisban. Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2,$ és $\mathbf{a}_3$ bázisvektorokhoz értelmezés szerint a

$$\mathbf{a}^1 = \frac{\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3}{a_o}; \quad \mathbf{a}^2 = \frac{\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_3}{a_o}; \quad \mathbf{a}^3 = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{a_o} \tag{1.6}$$

reciprok vektorok (reciprok bázisvektorok vagy röviden bázis) tartoznak (tartozik).

Könnyen ellenőrizhető, hogy a bázisvektorok és reciprok bázisvektorok között a

$$\mathbf{a}^k \cdot \mathbf{a}_l = \begin{cases} 1 \text{ ha } k = l \\ 0 \text{ ha } k \neq l \end{cases} \qquad k, l = 1,2,3 \tag{1.7}$$

összefüggés áll fenn.

Mivel bázist alkotnak az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ vektorok bármely $\mathbf{v}$ vektor kifejezhető segítségükkel a

$$\mathbf{v} = v^1\mathbf{a}_1 + v^2\mathbf{a}_2 + v^3\mathbf{a}_3 \tag{1.8}$$

alakban, ahol v^1, v^2 és v^3 rendre a $\mathbf{v}$ vektor $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, és $\mathbf{a}_3$-ra vonatkozó koordinátáját jelöli.

Az (1.8) képlet alapján, kihasználva az (1.7) összefüggést a

$$v^1 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}^1; \quad v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}^2; \quad v^3 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}^3 \tag{1.9a}$$

alakban kapjuk a v^i koordinátákat. Tömören:

$$v^i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}^i; \quad i = 1,2,3\,. \tag{1.9b}$$

Visszahelyettesítve a v^i-re vonatkozó képleteket elemi átalakításokkal kapjuk, hogy

$$\mathbf{v} = v^1\mathbf{a}_1 + v^2\mathbf{a}_2 + v^3\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1(\mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{a}_2(\mathbf{a}^2 \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{a}_3(\mathbf{a}^3 \cdot \mathbf{v}) \tag{1.10}$$

azaz, hogy

$$\mathbf{v} = \underbrace{[\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}^1 + \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{a}^2 + \mathbf{a}_3 \otimes \mathbf{a}^3]}_{\boldsymbol{I}} \cdot \mathbf{v}\,, \tag{1.11}$$

ahol a megjelölt képletrész az $\boldsymbol{I}$ egységtenzor kell legyen, hiszen az $\boldsymbol{I}$ önmagára képezi le a $\mathbf{v}$ vektort.

Az (1.8) és (1.11) képletek közötti gondolatmenet ismétlésével írhatjuk, hogy

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}^1 + v_2\mathbf{a}^2 + v_3\mathbf{a}^3 \tag{1.12}$$

ahonnan – ismét kihasználva az (1.7) összefüggést – kapjuk, hogy

$$v_1 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_1; \qquad v_2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_2; \qquad v_3 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_3\,. \tag{1.13a}$$

Az utóbbi egyenletben álló v_1, v_2 és v_3 a $\mathbf{v}$ vektor $\mathbf{a}^1$, $\mathbf{a}^2$, $\mathbf{a}^3$ bázisra vonatkoztatott koordinátáit jelöli. Tömör alakban:

$$v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_i \,. \tag{1.13b}$$

A fentiek alapján fennáll, hogy

$$\mathbf{v} = \mathbf{a}^1 \underbrace{(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{v})}_{v_1} + \mathbf{a}^2 \underbrace{(\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{v})}_{v_2} + \mathbf{a}^3 \underbrace{(\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{v})}_{v_3}$$

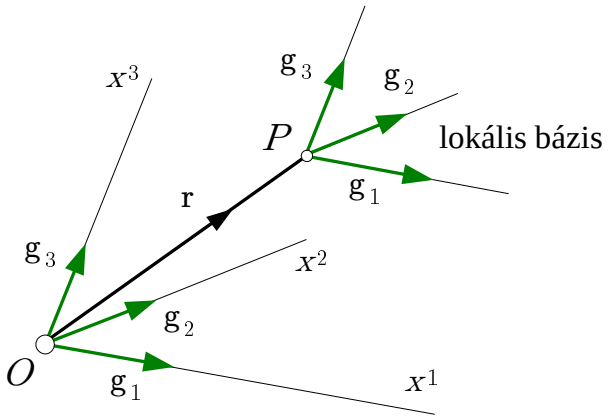
azaz

$$\mathbf{v} = \underbrace{[\mathbf{a}^1 \otimes \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}^2 \otimes \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}^3 \otimes \mathbf{a}_3]}_{\boldsymbol{I}} \cdot \mathbf{v} \,, \tag{1.14}$$

ami egyben azt is jelenti, hogy az $\boldsymbol{I}$ tenzor ismét az egységtenzor, pontosabban az (1.11) alatti alak transzponáltja – visszautalunk itt az (1.1) képletet követő magyarázatra.

1.2. Koordináta-rendszerek

1.2.1. Ferdeszögű KR-ek (általánosítás). Az 1.2. ábra egy, az (x^1, x^2, x^3), vagy röviden (x) az módon jelölt, ferdeszögű egyenesvonalú KR-t szemléltet. Az x^1, x^2 és x^3 koordináta-tengelyek irányát és irányítását az egymástól különböző, és egymással nem 90°-os szöget bezáró $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$ és $\mathbf{g}_3$ vektorok jelölik ki. A ferdeszögű szó jelzőként történő



1.2. ábra. Ferdeszögű egyenesvonalú KR

használata arra a körülményre utal, hogy a koordináta-tengelyek nem merőlegesek egymásra. Felhívjuk arra is a figyelmet, hogy a $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$ és $\mathbf{g}_3$ vektorok nem szükségképen egységvektorok. Fel fogjuk továbbá tételezni, hogy

$$\gamma_o = [\mathbf{g}_1 \mathbf{g}_2 \mathbf{g}_3] \neq 0 \,. \tag{1.15}$$

Ez egyben azt jelenti az előző szakaszban leírtak alapján, hogy bázist alkotnak a $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$ és $\mathbf{g}_3$ vektorok.

A $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$ és $\mathbf{g}_3$ vektorok alkotta bázist *kovariáns bázisnak*, magukat a bázisvektorokat pedig *kovariáns bázisvektoroknak* nevezzük majd. A kovariáns jelző egyrészt arra utal, hogy a bázisvektorok egymástól való megkülönböztetését alsó indexpozícióban elhelyezett számok teszik lehetővé. A kovariáns szó emellett arra is utal, hogy ezek a bázisvektorok eleget tesznek egy a 4.2.1. szakaszban részletezett transzformációs szabálynak a (4.15a) egyenletnek.

Az ábra feltünteti a tér tetszőleges P pontjának

$$\boxed{\mathbf{r} = x^1 \mathbf{g}_1 + x^2 \mathbf{g}_2 + x^3 \mathbf{g}_3} \tag{1.16}$$

a helyvektorát, valamint a P ponthoz kötött és a $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$ és $\mathbf{g}_3$ vektorok által kifeszített ún. lokális bázist. Ebben a lokális bázisban adjuk majd meg a P térponthoz kötött fizikai, vagy geometriai mennyiségeket leíró tenzorokat.

A jelen esetben minden egyes térpontban azonos a lokális bázis. Görbevonalú KR-ek esetén azonban, amint azt később az 1.2.5. pontban majd látni fogjuk, pontról pontra változik a lokális bázis.

Vegyük észre, hogy

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} \qquad i = 1,2,3\,. \tag{1.17}$$

Az (1.6) képlet alapján a

$$\boxed{\mathbf{g}^1 = \frac{\mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3}{\gamma_o}; \quad \mathbf{g}^2 = \frac{\mathbf{g}_3 \times \mathbf{g}_1}{\gamma_o}; \quad \mathbf{g}^3 = \frac{\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2}{\gamma_o}} \tag{1.18}$$

módon értelmezzük a $\mathbf{g}_i$ $(i = 1,2,3)$ vektorokhoz tartozó reciprok vektorokat.

Megjegyezzük, hogy az (1.18) képletekkel értelmezett $\mathbf{g}^1$, $\mathbf{g}^2$ és $\mathbf{g}^3$ vektorok ugyancsak bázist alkotnak. Ezeket a bázisvektorokat, mivel felső indexpozícióban van elhelyezve a bázisvektorok megkülönböztetését segítő számozás, *kontravariáns bázisvektoroknak* nevezzük. Az általuk alkotott bázis pedig a kontravariáns bázis.

A helyvektort adó (1.16) képletben álló x^1, x^2, x^3 koordináták az ún. *kontravariáns koordináták*.

Speciális esetben, ha egymásra kölcsönösen merőlegesek és egységvektorok a kovariáns bázisvektorok, azaz ha kartéziuszi KR-é válik a ferdeszögű KR az

$$y^1 = x^1 \quad y^2 = x^2\,, \quad y^3 = x^3 \tag{1.19a}$$

és

$$\mathbf{i}_1 = \mathbf{i}^1 = \mathbf{g}_1 = \mathbf{g}^1\,, \quad \mathbf{i}_2 = \mathbf{i}^2 = \mathbf{g}_2 = \mathbf{g}^2\,, \quad \mathbf{i}_3 = \mathbf{i}^3 = \mathbf{g}_3 = \mathbf{g}^3 \tag{1.19b}$$

összefüggések állnak fenn a kontravariáns koordináták és a vonatkozó bázisvektorok között.

1.2.2. A bázisvektorok további tulajdonságai. A bázisvektorokat azonosító számok indexként jelentek meg. *Tömörebb és így áttekinthetőbb írásmód elérése érdekében abban állapodunk meg az indexek tekintetében, hogy a latin betűs index az 1, 2, 3 a görögbetűs index pedig az 1, 2 értékeket veheti fel anélkül, hogy erre egyéb jelölésben külön is felhívnánk a figyelmet.* Az indexekre vonatkozó megállapodásunk szerint a

$\mathbf{g}_l$ kifejezés önmagában a három kovariáns bázisvektort, a
$\mathbf{g}^k$ kifejezés pedig a három kontravariáns bázisvektort jelöli.

A két indexes δ^{kl}, $\delta^k{}_l$, $\delta_l{}^k$, δ_{kl} Kronecker szimbólumot (Kronecker deltát) a

$$\boxed{\left.\begin{matrix}\delta^{kl}\\ \delta^k{}_l\\ \delta_l{}^k\\ \delta_{kl}\end{matrix}\right\} = \begin{cases} 1 & \text{ha } k = l \\ 0 & \text{ha } k \neq l \end{cases}} \tag{1.20}$$

kifejezés értelmezi. Mivel az értelmezés szerint a $\delta^k{}_l$ és $\delta_l{}^k$ a k és l indexek minden lehetséges értékére megegyezik egymással ezek esetén közömbös az indexek sorrendje.

Visszaidézve a bázisvektorok és a reciprok bázisvektorok között fennálló (1.7) egyenletet ($\mathbf{a}^k$-nak $\mathbf{g}^k$, $\mathbf{a}_l$-nek $\mathbf{g}_l$ felel meg) írhatjuk, hogy

$$\boxed{\mathbf{g}^k \cdot \mathbf{g}_l = \delta^k{}_l\,.} \tag{1.21}$$

Figyeljük meg, hogy mindkét oldalon azonos az indexek sorrendje és pozíciója.

Megmutatjuk a továbbiakban, hogy fennáll a

$$\gamma^o = \left[\mathbf{g}^1\mathbf{g}^2\mathbf{g}^3\right] = \frac{1}{\gamma_o} = \frac{1}{[\mathbf{g}_1\mathbf{g}_2\mathbf{g}_3]}$$

– itt γ^o a felsőindexes bázisvektorok vegyesszorzata –, vagy ami ugyanaz a

$$\boxed{\gamma^o = \frac{1}{\gamma_o}} \tag{1.22}$$

összefüggés. Az igazolás a kétszeres vektorszorzatokkal kapcsolatos és a lentiekhez illeszkedően az $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{a}$ alakban kiírt kifejtési tétel alkalmazásán nyugszik:

$$\mathbf{g}^2\times\mathbf{g}^3 = \frac{1}{\gamma_o^2}(\overbrace{\mathbf{g}_3}^{\mathbf{a}}\times\overbrace{\mathbf{g}_1}^{\mathbf{b}})\times\overbrace{(\mathbf{g}_1\times\mathbf{g}_2)}^{\mathbf{c}} = \frac{1}{\gamma_o^2}\left[\mathbf{g}_3\cdot(\mathbf{g}_1\times\mathbf{g}_2)\,\mathbf{g}_1 - 0\right] = \frac{\mathbf{g}_1}{\gamma_o}\,.$$

Következőleg

$$\gamma^o = \mathbf{g}^1\cdot\left(\mathbf{g}^2\times\mathbf{g}^3\right) = \underbrace{\mathbf{g}^1\cdot\mathbf{g}_1}_{\delta^1{}_1=1}\frac{1}{\gamma_o} = \frac{1}{\gamma_o}$$

Az is látszik az igazolás első lépéseként írt egyenlet jobb és baloldalának egybevetéséből, hogy

$$\mathbf{g}_1 = \gamma_o\mathbf{g}^2\times\mathbf{g}^3 = \frac{\mathbf{g}^2\times\mathbf{g}^3}{\gamma^o}\,.$$

Ez az egyenlet azt mutatja, hogy $\mathbf{g}_1$ vektor a reciprok bázis egyik reciprok vektora. Hasonlóan lehet ugyanezt igazolni a $\mathbf{g}_2$ és $\mathbf{g}_3$ bázisvektorok esetén. Következőleg az eredeti $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$ bázis a reciprok bázis reciproka.

A továbbiakban fontos szerepet játszik az egyenletek egyszerűbb írását szolgáló ún. Einstein-féle *összegezési konvenció. Az összegezési konvenció azt írja elő, hogy a különböző indexpozícióban lévő azonos (néma) indexek szerint összegezni kell.*

Így például

$$\boxed{\delta^p{}_p = \delta^1{}_1 + \delta^2{}_2 + \delta^3{}_3 = 3} \tag{1.23}$$

vagy

$$\delta^r{}_l\delta^l{}_m = \delta^r{}_1\delta^1{}_m + \delta^r{}_2\delta^2{}_m + \delta^r{}_3\delta^3{}_m = \delta^r{}_m \text{ mivel a kifejezés értéke } \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad r = m \\ 0 & \text{ha} \quad r \neq m \end{cases}$$

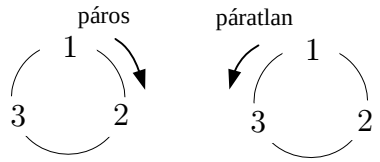
A $\delta^r{}_m$ végeredmény előállítása a következő módon foglalható szavakba: a $\delta^l{}_m$-el történő szorzás hatására az első deltában álló l néma indexet át kell nevezni a második deltában álló nem néma index nevére – azaz az m névre – és ekkor elhagyható a második delta.

A szavakba foglalt megfigyelés alapján szokás a Kronecker szimbólumot *indexátnevező operátornak* nevezni.

Vegyük észre, hogy az összegző (néma) index is átnevezhető: $\delta^k{}_k = \delta^l{}_l = \delta^m{}_m$

További fontos megállapodás, hogy egyenletek írása során az önmagában (önmagukban) álló, nem néma (a képletben nem ismételt) indexet (indexeket) szabad indexnek (indexeknek) fogjuk nevezni.

1.2.3. A permutációs szimbólum, vektoriális és vegyes szorzatok. Azt fogjuk mondani, hogy a klm indexhármas páros permutációja az 1,2,3 számoknak, ha 123, 231 vagy 312 az értéke. Páratlan permutációról beszélünk, ha a klm indexhármasnak 132, 321 vagy 213 az értéke.



1.3. ábra. Páros és páratlan permutációk

Figyeljük meg, hogy az 1, 2 vagy 3 számok egyikét elsőnek véve a páros permutációk az óramutató járásával egyező irányban, a páratlan permutációk pedig az óramutató járásával ellentétes irányban olvashatók le az 1,2,3 számokat körök segítségével szemléltető ábráról.

Az alsó és felső indexes *permutációs szimbólumot* az

$$e_{klm} \qquad \text{vagy} \qquad e^{pqr}$$

módon jelöljük. A permutációs szimbólumok értelmezését a

(1.24a)
$$\boxed{e_{klm} = \begin{cases} 1 & \\ -1 & \text{ha a } klm \\ 0 & \end{cases} \begin{array}{l} \text{páros} \\ \text{páratlan} \\ \text{nem} \end{array} \text{ permutációja az 123-nak}}$$

és a

(1.24b)
$$\boxed{e^{pqr} = \begin{cases} 1 & \\ -1 & \text{ha a } pqr \\ 0 & \end{cases} \begin{array}{l} \text{páros} \\ \text{páratlan} \\ \text{nem} \end{array} \text{ permutációja az 123-nak}}$$

képletek adják.

Az (1.15), (1.18) és az (1.24a) képletek egybevetése alapján a

(1.25a)
$$\mathbf{g}_k \times \mathbf{g}_l = \gamma_o e_{klm} \mathbf{g}^m$$

alakban írható fel a $\mathbf{g}_k$ és $\mathbf{g}_l$ bázisvektorok vektoriális szorzata.

Ugyanígy ellenőrizhető, hogy

(1.25b)
$$\mathbf{g}^p \times \mathbf{g}^q = \gamma_o e^{pqm} \mathbf{g}_m \,.$$

Legyen

(1.26)
$$\boxed{\varepsilon_{klm} = \gamma_o \, e_{klm} \qquad \text{és} \qquad \varepsilon^{pqm} = \gamma^o \, e^{pqm} \,.}$$

Az ε_{klm} és ε^{pqm} mennyiségeket (objektumokat) alsóindexes (kovariáns), illetve felsőindexes (kontravariáns) *permutációs tenzornak* fogjuk nevezni.

Az elnevezésnek az a magyarázata, hogy epszilon tenzor tenzor ún. valódi tenzor. Ezt később az (5.6) összefüggéssel kapcsolatos gondolatmenet igazolja – a részleteket illetően lásd a 41. oldalt.

A permutációs tenzorok segítségével

(1.27)
$$\mathbf{g}_k \times \mathbf{g}_l = \varepsilon_{klm} \, \mathbf{g}^m \qquad \text{és} \qquad \mathbf{g}^p \times \mathbf{g}^q = \varepsilon^{pqm} \, \mathbf{g}_m$$

a bázisvektorok vektoriális szorzatai.

Az (1.25a,b) és az (1.26) felhasználásával

(1.28a)
$$[\mathbf{g}_k \, \mathbf{g}_l \, \mathbf{g}_r] = (\mathbf{g}_k \times \mathbf{g}_l) \cdot \mathbf{g}_r = \gamma_o e_{klr} \underbrace{\mathbf{g}^m \cdot \mathbf{g}_r}_{\delta^m{}_r} = \gamma_o e_{klm} = \varepsilon_{klm}$$

a három alsóindexes (kovariáns), és

(1.28b)
$$[\mathbf{g}^p \, \mathbf{g}^q \, \mathbf{g}^s] = (\mathbf{g}^p \times \mathbf{g}^q) \cdot \mathbf{g}^m = \gamma^o e^{pqr} \underbrace{\mathbf{g}_r \cdot \mathbf{g}^s}_{\delta_r{}^s} = \gamma^o e^{pqs} = \varepsilon^{pqs}$$

a három felsőindexes (kontravariáns) bázisvektor vegyes szorzata.

1.2.4. Permutációs szimbólumok szorzatai. Az alábbiakban megvizsgáljuk, hogy milyen értékeket vehetnek fel az

$$e_{k\ell m}e^{kqr}\,, \qquad e_{k\ell m}e^{k\ell r} \qquad \text{és} \qquad e_{k\ell m}e^{k\ell m}$$

szorzatok.

Vegyük észre, hogy az első esetben egy index (ez a k), a második esetben két index (a k és ℓ), a harmadik esetben pedig valamennyi index összegező (néma) index.

Mivel a második és harmadik eset az elsőből származtatható érdemes az utóbbit vizsgálni először. Ha kiírjuk az

$$e_{k\ell m}e^{kqr} = e_{1\ell m}e^{1qr} + e_{2\ell m}e^{2qr} + e_{3\ell m}e^{3qr}$$

háromtagú összeget és visszaidézzük a permutációs szimbólum definícióját, akkor kapjuk, hogy az összeg

- csak akkor különbözik zérustól,
  (a) ha
  $$\ell = q\,, \quad m = r\,, \quad \ell \neq m$$
  és ez esetben 1 az értéke (ekkor ui. az alsó és felső indexhármasok egyszerre vagy páros, vagy páratlan permutációk – a jobboldalon pedig csak egy tag különbözik zérustól)
  (b) vagypedig, ha
  $$\ell = r\,, \quad m = q\,, \quad \ell \neq m$$
  és ez esetben -1 az értéke (ekkor ui. az alsó és felső indexhármas különböző permutáció – ha az egyik páros a másik páratlan és viszont – és ismét csak egy nem zérus tag van a jobboldalon),
- egyébként pedig, mindig zérus értékű.

Nem nehéz ellenőrizni, kihasználva a Kronecker szimbólum (1.20) alatti értelmezését, hogy a

$$\delta_\ell{}^q\delta_m{}^r - \delta_\ell{}^r\delta_m{}^q$$

kifejezés ugyanezen értékeket veszi fel. Következésképp, tekintettel az (1.26) és az (1.22) képletekre is

$$\boxed{\varepsilon_{k\ell m}\varepsilon^{kqr} = e_{k\ell m}e^{kqr} = \delta^{qr}_{\ell m} = \delta_\ell{}^q\delta_m{}^r - \delta_\ell{}^r\delta_m{}^q} \tag{1.29}$$

az első szorzat értéke. A $\delta^{qr}_{\ell m}$ negyedrendű Kronecker-deltát maga a képlet értelmezi.

Az utóbbi képlet alapján kapjuk meg a második szorzat értékét:

$$\varepsilon_{k\ell m}\varepsilon^{k\ell r} = e_{k\ell m}e^{k\ell r} = \delta^{\ell r}_{\ell m} = \underbrace{\delta_\ell{}^\ell}_{3}\delta_m{}^r - \underbrace{\delta_\ell{}^r\delta_m{}^\ell}_{\delta_m{}^r} = 2\delta_m{}^r\,.$$

Innen

$$\boxed{\varepsilon_{k\ell m}\varepsilon^{k\ell r} = e_{k\ell m}e^{k\ell r} = 2\delta_m{}^r\,.} \tag{1.30a}$$

Ami a harmadik szorzatot illeti, az utóbbi képlettel az

$$\boxed{\varepsilon_{k\ell m}\varepsilon^{k\ell m} = e_{k\ell m}e^{k\ell r} = 2\delta_m{}^m = 6\,.} \tag{1.30b}$$

eredmény adódik.

A második szorzat egy alkalmazásaként fejezzük ki a $\mathbf{g}^r$-et az $(1.27)_1$ egyenletből. Ha átszorzunk ε^{klr}-el, akkor

$$\varepsilon^{klr}\mathbf{g}_k \times \mathbf{g}_l = \underbrace{\varepsilon_{klm}\varepsilon^{klr}}_{2\delta_m{}^r}\mathbf{g}^m$$

az eredmény, azaz

$$\mathbf{g}^r = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{rkl}\,\mathbf{g}_k \times \mathbf{g}_l\,. \tag{1.31a}$$

Ugyanígy adódik, hogy

$$\mathbf{g}_k = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{klm}\,\mathbf{g}^l \times \mathbf{g}^m\,. \tag{1.31b}$$

1.2.5. Görbevonalú koordináta-rendszerek. Az (y) kartéziuszi KR-ben a P pontnak

$$\mathbf{r} = y^m\,\mathbf{i}_m$$

a helyvektora. Legyen (x^1, x^2, x^3) három nem feltétlenül azonos dimenziójú valós változó, amelyek mindegyike a valós számok egy-egy részhalmazán (vagypedig a valós számok teljes halmazán) fut végig. Tételezzük fel, hogy létezik az

$$y^m = y^m(x^1, x^2, x^3) \tag{1.32}$$

függvényhármas, amely differenciálható és kölcsönösen egyértelmű, ha az y^m a tér egy B tartományának valamely pontja. Mivel a differenciálhatóság miatt a P pont elemi környezetében fennállnak a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial y^1}{\partial x^1}\,\mathrm{d}x^1 + \frac{\partial y^1}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x^2 + \frac{\partial y^1}{\partial x^3}\,\mathrm{d}x^2 &= \mathrm{d}y^1\\
\frac{\partial y^2}{\partial x^1}\,\mathrm{d}x^1 + \frac{\partial y^2}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x^2 + \frac{\partial y^2}{\partial x^3}\,\mathrm{d}x^2 &= \mathrm{d}y^2\\
\frac{\partial y^3}{\partial x^1}\,\mathrm{d}x^1 + \frac{\partial y^3}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x^2 + \frac{\partial y^3}{\partial x^3}\,\mathrm{d}x^2 &= \mathrm{d}y^3
\end{aligned} \tag{1.33}$$

egyenletek az (1.32) kapcsolat csak akkor fordítható meg az elemi környezetben (csak akkor kölcsönösen egyértelmű a P pont elemi környezetében), ha a $\mathrm{d}x^k$-t tekintve ismeretlennek van megoldása az (1.33) lineáris algebrai egyenletrendszernek. A megoldhatóságnak az a feltétele, hogy

$$J_{y,x} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \frac{\partial y^1}{\partial x^2} & \frac{\partial y^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial y^2}{\partial x^1} & \frac{\partial y^2}{\partial x^2} & \frac{\partial y^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial y^3}{\partial x^1} & \frac{\partial y^3}{\partial x^2} & \frac{\partial y^3}{\partial x^3} \end{vmatrix} \neq 0\,, \tag{1.34}$$

azaz zérustól különböző kell legyen a $J_{y,x}$ Jacobi-féle függvénydeterminánsa. Ha a B tartomány minden pontjában teljesül az (1.34) feltétel, akkor a kapcsolat megfordítható a teljes B tartományban, azaz létezik az

$$x^m = x^m(y^1, y^2, y^3) \tag{1.35}$$

inverz függvényhármas.

A továbbiakban mindig feltételezzük, hogy kölcsönösen egyértelmű (azaz megfordítható) az (1.32) függvénykapcsolat. Ez esetben nyilvánvalóan zérustól különbözik a

$$J_{x,y} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial y^1} & \frac{\partial x^1}{\partial y^2} & \frac{\partial x^1}{\partial y^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial y^1} & \frac{\partial x^2}{\partial y^2} & \frac{\partial x^2}{\partial y^3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial y^1} & \frac{\partial x^3}{\partial y^2} & \frac{\partial x^3}{\partial y^1} \end{vmatrix} \neq 0\,, \tag{1.36}$$

Jacobi-féle függvénydeterminánsa is.

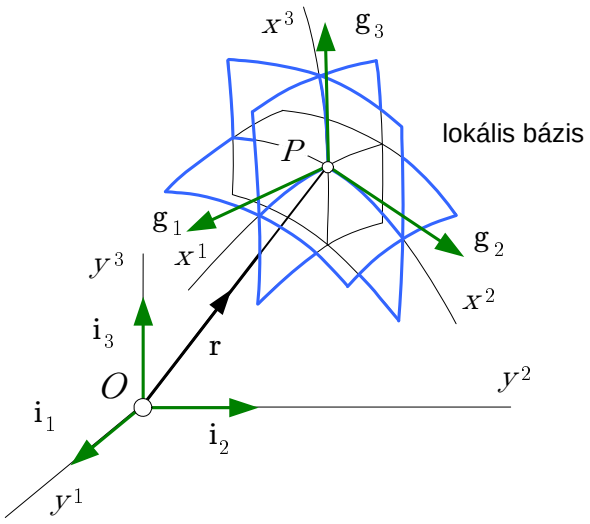
Az (1.35) egyenlettel adott x^m hármast a P pont *görbevonalú (kontravariáns) koordinátáinak* nevezzük.

A későbbiek kedvéért megállapodunk abban, hogy valamilyen kontravariáns, mondjuk az x^k koordináta szerinti parciális deriválás esetén a nevezőben álló k felső index a teljes

deriváltat tekintve alsó indexnek minősül, és így megjelenhet összegező, illetve szabad indexként is. Ezzel a megállapodással a

$$\mathrm{d}y^m = \frac{\partial y^m}{\partial x^k}\,\mathrm{d}x^k\,, \tag{1.37}$$

módon tömör alakban írható fel az (1.33) egyenletrendszer. Megjegyezzük, hogy ezt a megállapodást, anélkül, hogy kimondtuk volna, már korábban is alkalmaztuk az (1.17) egyenlet esetén, ahol az i valójában alsó pozícióban álló szabad indexként szerepel mindkét oldalon.



1.4. ábra. Görbevonalú KR

Tekintettel az (1.32) függvénykapcsolatra a P pont

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^1, x^2, x^3) = y^1(x^1, x^2, x^3)\mathbf{i}_1 + y^2(x^1, x^2, x^3)\mathbf{i}_2 + y^3(x^1, x^2, x^3)\mathbf{i}_3 \tag{1.38}$$

helyvektora a pont x^k görbevonalú koordinátáinak függvénye. Az

$$\mathbf{r}(x^1, x^2 = \text{állandó}, x^3 = \text{állandó})\,, \qquad \mathbf{r}(x^1 = \text{állandó}, x^2, x^3 = \text{állandó})\,,$$

és

$$\mathbf{r}(x^1 = \text{állandó}, x^2 = \text{állandó}, x^3)$$

térgörbéknek rendre x^1, x^2 és x^3 a paramétere. Magukat a térgörbéket, mivel csak a görbe paramétereként szereplő görbevonalú koordináta változik a görbék mentén, x^1, x^2, illetve x^3 koordináta-vonalaknak szokás nevezni.

Az

$$\mathbf{r}(x^1 = \text{állandó}, x^2, x^3)\,, \quad \mathbf{r}(x^1, x^2 = \text{állandó}, x^3)\,, \quad \mathbf{r}(x^1, x^2, x^3 = \text{állandó})$$

görbült felületek mentén állandó értékűek az x^1, x^2, illetve x^3 görbevonalú koordináták. Ez okból S_1, S_2 és S_3 koordináta-felület a nevük. Nyilvánvaló, hogy az x^1, x^2, és x^3 koordinátavonalak az S_2 és S_3, az S_1 és S_2, illetve az S_1 és S_2 koordinátafelületek metszésvonalai.

A koordináta-vonalak

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_1 &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^1} = \frac{\partial y^1}{\partial x^1}\,\mathbf{i}_1 + \frac{\partial y^2}{\partial x^1}\,\mathbf{i}_2 + \frac{\partial y^3}{\partial x^1}\,\mathbf{i}_3\,,\\
\mathbf{g}_2 &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^2} = \frac{\partial y^1}{\partial x^2}\,\mathbf{i}_1 + \frac{\partial y^2}{\partial x^2}\,\mathbf{i}_2 + \frac{\partial y^3}{\partial x^2}\,\mathbf{i}_3\,,\\
\mathbf{g}_3 &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^3} = \frac{\partial y^1}{\partial x^3}\,\mathbf{i}_1 + \frac{\partial y^2}{\partial x^3}\,\mathbf{i}_2 + \frac{\partial y^3}{\partial x^3}\,\mathbf{i}_3
\end{aligned} \tag{1.39}$$

érintőinek zérustól különböző a

$$\gamma_o = \begin{vmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \frac{\partial y^1}{\partial x^2} & \frac{\partial y^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial y^2}{\partial x^1} & \frac{\partial y^2}{\partial x^2} & \frac{\partial y^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial y^3}{\partial x^1} & \frac{\partial y^3}{\partial x^2} & \frac{\partial y^3}{\partial x^3} \end{vmatrix} = J_{y,x}$$

vegyesszorzata, ha kölcsönösen egyértelmű az (1.32) függvénykapcsolat. Mivel ez feltevésünk $\gamma_o \neq 0$, következik tehát, hogy kovariáns bázist alkotnak a P pontban a koordinátavonalak

$$\boxed{\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i}} \tag{1.40}$$

érintő vektorai. Ez a bázis a pontról pontra változó un. lokális bázis, amely általában ferdeszögű de bizonyos esetekben (pl. henger KR, avagy gömbi KR) ortogonális (utóbbi esetben bázisvektorok kölcsönösen merőlegesek egymásra). A (reciprok bázisvektorokat)[kontravariáns bázist] most is ($\mathbf{g}^k$ jelöli) [a $\mathbf{g}^k$ reciprok bázisvektorok alkotják] és változatlanul érvényesek a bázisvektorok vektoriális szorzatainak, valamint a kovariáns és kontravariáns bázisvektorok számításának az 1.2.1. és 1.2.2. szakaszokban megismert képletei.

Magától értetődik, hogy a P pont fizikai állapotát leíró valamennyi tenzor megadható ebben a bázisban.

Az $\mathbf{a}$ vektor például az

$$\mathbf{a} = a^1\mathbf{g}_1 + a^2\mathbf{g}_2 + a^3\mathbf{g}_3 = a_1\mathbf{g}^1 + a_2\mathbf{g}^2 + a_3\mathbf{g}^3 \,, \tag{1.41}$$

vagy tömören az

$$\mathbf{a} = a^p\mathbf{g}_p = a_k\mathbf{g}^k$$

alakban írható fel, ahol általában

$$a^1 \neq a_1 \,, \qquad a^2 \neq a_2 \,, \qquad a^3 \neq a_3 \,. \tag{1.42}$$

A fenti képletekben álló a^p és a_k rendre az $\mathbf{a}$ vektor kontravariáns illetve kontravariáns koordinátáit jelöli. A vektort tekintve

$$a^1\mathbf{g}_1 \,, \quad a^2\mathbf{g}_2 \,, \quad a^3\mathbf{g}_3 \qquad \text{és} \qquad a_1\mathbf{g}^1 \,, \quad a_2\mathbf{g}^2 \,, \quad a_3\mathbf{g}^3$$

az $\mathbf{a}$ koordináta-irányú összetevői a kovariáns illetve kontravariáns bázisban.

Gyakorlatok

1. Vizsgálja meg vajon lineárisan függetlenek-e egymástól az azonos ponthoz kötöttnek tekintett (közös alkalmazási pontú) $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ vektorok:

   $\mathbf{a}_1 = 2\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 + 3\mathbf{i}_3 \,,$ $\qquad$ $\mathbf{a}_1 = 2\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 + 3\mathbf{i}_3 \,,$

   $\mathbf{a}_2 = 5\mathbf{i}_1 + 10\mathbf{i}_2 + 2\mathbf{i}_3 \,,$ $\qquad$ $\mathbf{a}_2 = 6\mathbf{i}_1 + 7\mathbf{i}_2 + 5\mathbf{i}_3 \,,$

   $\mathbf{a}_2 = 6\mathbf{i}_1 + 3\mathbf{i}_2 + 9\mathbf{i}_3 \,,$ $\qquad$ $\mathbf{a}_2 = 9\mathbf{i}_1 + 10\mathbf{i}_2 + 8\mathbf{i}_3 \,.$

2. Igazolja, hogy bázist alkotnak a

   $$\mathbf{g}_1 = \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3 \,, \quad \mathbf{g}_2 = \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 + 2\mathbf{i}_3 \quad \text{és} \quad \mathbf{g}_3 = \mathbf{i}_1 + 2\mathbf{i}_2 + 3\mathbf{i}_3$$

   vektorok. Írja fel az $\mathbf{a} = 6\mathbf{i}_1 + 9\mathbf{i}_2 + 14\mathbf{i}_3$ vektort ebben a bázisban.

3. Tegyük fel, hogy lineárisan függetlenek az azonos ponthoz kötöttnek tekintett $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ vektorok. Mekkora a λ állandó értéke, ha lineárisan összefüggőek a $\mathbf{b}_1$ és $\mathbf{b}_2$ vektorok?

   $$\mathbf{b}_1 = \lambda\mathbf{a}_1 + 4\mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_3 \,, \mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_1 + \lambda\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3 \,.$$

4. Igazolja, hogy az (1.18) képletekkel értelmezett reciprok bázisvektorok is a háromméretű tér egy bázisát alkotják.
5. Igazolja, hogy a
$$\lambda_1 \mathbf{g}_1 + \lambda_2 \mathbf{g}_2 + \lambda_2 \mathbf{g}_3 = 0$$
egyenletnek csak triviális megoldása van a λ_1, λ_2 és λ_3 skalárokra, ha $J_{y,x} \neq 0$

2. FEJEZET

Az indexes jelölési mód alapjai

2.1. Műveletek indexes mennyiségekkel

2.1.1. Objektumok, sokaságok. A jelen szakaszban bevezetésre kerülő jelölések, jelölésbeli megállapodásoknak, összhangban az eddigiekkel, az a fő célja, hogy egyszerűbbé tegyék a vektoriális, illetve a tenzoriális egyenletek írását.

Az $[a_k]\{a^p\}$ számhármast (változóhármast) [alsóindexes]{felsőindexes} vagy *egyindexes* hármasnak, rendezett sokaságnak (objektumnak) nevezzük.

Kézi számításhoz az alsóindexes sokaságok sorvektorként illetve oszlopvektorként mátrixba rendezhetők a

$$a_k \quad \Rightarrow \quad [\ a_1 \quad a_2 \quad a_3\ ]\,,$$

vagypedig a

$$a_k \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

módon.

A felsőindexes a^p sokaság ugyanilyen módon foglalható sor-, vagy oszlopmátrixba.

Az egyes egyindexes sokaságok egymástól való megkülönböztetését a sokaságokat azonosító betűk eltérése teszi lehetővé.

Megállapodunk abban a továbbiak során – anélkül, hogy erre a megállapodásra külön is felhívnánk a figyelmet –, hogy az

$$a_k \qquad \text{és} \qquad a^p$$

egyindexes sokaság ugyanazon vektor kovariáns és kontravariáns koordinátáit jelenti valamilyen lokális ferdeszögű bázisban.

Ami a szóhasználatot illeti az egyszerűségre törekedve azt fogjuk mondani, hogy az a_k vagy az a^p vektor.

Ha oszlopmátrixba rendezett vektorokat használunk valamilyen okból pl. számítások végzése során, akkor azok szedésben az

$$[a_k] = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\,, \qquad \text{illetve az} \qquad [a^p] = \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

módokon jelennek meg.

A bevezetett jelöléssel az $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{c}$ vektorösszeg vagy az

$$a_k + b_k = c_k\,, \qquad \text{vagypedig az} \qquad a^k + b^k = c^k$$

alakban írható fel.

További fontos kérdésre világítanak rá az alábbiak.

Tekintsünk két, az (1) és (2) jelű, ferdeszögű KR-t. Legyen

$$\underset{(1)}{a}{}_k\,, \qquad \text{valamint} \qquad \underset{(2)}{a}{}_k$$

az (1) és (2) jelű ferdeszögű KR-ben vett számhármas (változóhármas). A két hármas akkor adja ugyanazon vektor kovariáns koordinátáit a vonatkozó KR-ekben, ha fennáll az

$$\underset{(1)}{a}_k \, \mathbf{g}^k_{(1)} = \underset{(2)}{a}_k \, \mathbf{g}^k_{(2)}$$

egyenlőség. A fenti képletből, amint részletesen is látni foguk az 5.1.1. szakaszban, az következik, hogy csak akkor alkotja ugyanazon vektor három kovariáns koordinátáját az (1) és (2) jelű ferdeszögű KR-ben értelmezett

$$\underset{(1)}{a}_k\,, \qquad \text{valamint} \qquad \underset{(2)}{a}_k$$

hármas, ha alkalmas transzformációs összefüggés teljesül a tekintett két hármas között.

Az

$$a_k b_l\,, \quad a_k b^p\,, \quad a^k b^l\,, \quad a^l b_p\,, \qquad \text{vagy} \quad c^k{}_m$$

mennyiségek *kétindexes*, illetve *másodrendű sokaságok, objektumok*. Ezek is mátrixba rendezhetők ha megállapodunk abban, hogy balról jobbra haladva az első index (függetlenül attól, hogy alsó vagy felső) sort, a második index pedig (ugyancsak függetlenül attól, hogy alsó avagy felső) oszlopot azonosít. A mondottak alapján az $a_k b_l$ szorzat, vagy a $c_k{}^m$ sokaság a

$$a_k b_l \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{bmatrix}, \qquad c^k{}_m \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} c^1{}_1 & c^1{}_2 & c^1{}_3 \\ c^2{}_1 & c^2{}_2 & c^2{}_3 \\ c^3{}_1 & c^3{}_2 & c^3{}_3 \end{bmatrix}$$

módon rendezhető, illetve foglalható mátrixba.

Visszaidézve és részben kihasználva az (1.20) és (1.21) képleteket a kétindexes objektumok tipikus példáiként adódnak a kovariáns és kontravariáns bázisvektorok

$$\delta_k{}^m = \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}^m \qquad \text{és} \qquad \delta^m{}_k = \mathbf{g}^m \cdot \mathbf{g}_k \tag{2.2a}$$

szorzatai. Közös mátrixuk

$$[\delta_k{}^m] = [\delta^m{}_k] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.2b}$$

alakú. Ezt ugyanolyan módon szedtük mint az a_k illetve a^p vektorok oszlopmátrixait.

A kovariáns bázisvektor kovariáns bázisvektorral vett, illetve a kontravariáns bázisvektor kontravariáns bázisvektorral vett skalárszorzata a g_{kl} és g^{pq} kétindexes objektumokat értelmezi:

$$g_{kl} = \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}_l\,, \qquad [g_{kl}] = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \tag{2.3a}$$

$$g^{pq} = \mathbf{g}^p \cdot \mathbf{g}^q\,, \qquad [g^{pq}] = \begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{bmatrix} \tag{2.3b}$$

Vegyük észre, hogy a (2.3a,b) képletek a g_{kl} és g^{pq} kétindexes sokaságok mátrixait is tartalmazzák.

Megjegyezzük, hogy:

1. Fennállnak a skalárszorzat kommutativitása miatt a

$$g_{kl} = g_{lk}\,, \qquad g^{pq} = g^{qp} \tag{2.4}$$

relációk. Ezek azt fejezik ki, hogy szimmetrikusak a g_{kl} és g^{pq} kétindexes sokaságok mátrixai.

2. Bár vektorok skalárszorzataiként értelmeztük a $\delta_k{}^m$, $\delta^m{}_k$, g_{kl} és g^{pq} kétindexes sokaságokat látni fogjuk később, hogy ezek a mennyiségek az egységtenzor (más néven metrikus tenzor) különböző alakjai.

Háromindexes sokaságnak tekinthetők az

$$e_{klm}\,, \qquad e^{pqr}$$

permutációs szimbólumok, valamint a belőlük képzett

$$\varepsilon_{klm} = \gamma_o e_{klm}\,, \quad \varepsilon^{pqr} = \gamma^o e^{pqr}$$

szorzatok az ún. epszilon tenzorok (az utóbbi mennyiségeket az (1.26) egyenlettel értelmeztük, tenzor mivoltuk igazolását a 41. oldalon leljük fel).

Visszaidézve az 1.2.2. szakasz megállapodásait a latin (és görög) indexek értékéről, az összegezési konvencióról és ezzel összefüggésben a néma és a szabad index fogalmáról, valamint kihasználva a sokaságokról mondottakat is a

$$\begin{bmatrix} c^1{}_1 & c^1{}_2 & c^1{}_3 \\ c^2{}_1 & c^2{}_2 & c^2{}_3 \\ c^3{}_1 & c^3{}_2 & c^3{}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{bmatrix}$$

egyenlet, ez formailag lineáris egyenletrendszer a $c^k{}_m$ együtthatókkal, az a^m ismeretlennel és a b^k zavarótaggal, a

$$c^k{}_m\, a^m = b^k \tag{2.5}$$

tömör alakban írható fel, ahol a pirossal szedett, az egyenleteket számláló index a szabad index, amely mindkét oldalon ugyanabban az indexpozícióban kell, hogy álljon. Ha ezt a szabályt nem tartjuk be sérül az indexegyensúly elve, amely azt mondja ki, hogy egy indexes jelölésmódban írt egyenlet minden tagjában azonos azaz vagy felső, vagy alsó indexpozícióban kell, hogy legyen(ek) a (az azonos) szabad index(ek). A többesszám használata az utóbbi mondatban arra utal, hogy egynél több szabadindex is lehetséges.

2.1.2. Vektorok koordinátái, indexemelés és süllyesztés. Kiindulva az

$$\mathbf{a} = a^k \mathbf{g}_k = a_p \mathbf{g}^p \tag{2.6}$$

egyenletből, majd kihasználva az (1.10) képletet, a Kronecker delta indexátnevező operátor voltát, valamint (a 2.3a,b) összefüggéseket azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{g}^m = a^k \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}^m = a^k \delta_k{}^m = a^m\,, \tag{2.7a}$$

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{g}_l = a_p\, \mathbf{g}^p \cdot \mathbf{g}_l = a_p \delta^p{}_l = a_l\,. \tag{2.7b}$$

Ha még a fenti két képletet is helyettesítjük a lenti átalakítások utolsó lépésében, akkor adódik, hogy

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{g}^m = a_p\, \mathbf{g}^p \cdot \mathbf{g}^m = a_p g^{pm} = \underset{(2.7a)}{\Uparrow} = a^m\,, \tag{2.8a}$$

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{g}_l = a^k \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}_l = a^k g_{kl} = \underset{(2.7b)}{\Uparrow} = a_l\,. \tag{2.8b}$$

Összegezve:

$$\boxed{\mathbf{a}\cdot\mathbf{g}_l = a_l\,,} \qquad \boxed{\mathbf{a}\cdot\mathbf{g}^m = a^m\,,} \tag{2.9a}$$

$$\boxed{a^k g_{kl} = a_l\,.} \qquad \boxed{a_p g^{pm} = a^m\,,} \tag{2.9b}$$

Szavakban: az [a_l kovariáns koordináta]{a^m kontravariáns koordináta} az $\mathbf{a}$ vektor [kovariáns $\mathbf{g}_l$]{kontravariáns $\mathbf{g}^m$} bázisvektorral való skaláris szorzata.

A $(2.9\mathrm{b})_{1,2}$ képletek az indexemelés és indexsüllyesztés szabályai. Segítségükkel megadhatók az [a_l kovariáns]{a^m kontravariáns} koordináták az {a^k kontravariáns}[a_p kovariáns] koordinátákkal feltéve, hogy ismertek a g_{kl} és g^{pm} objektumok.

A $(2.9\mathrm{a})_{1,2}$ képletek szerint a

$$\underbrace{\mathbf{g}_k}_{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{g}_l = g_{kl}$$

szorzat a $\mathbf{g}_k$ vektor l-ik kovariáns, a

$$\underbrace{\mathbf{g}^p}_{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{g}^m = g^{pm}$$

szorzat pedig a $\mathbf{g}^p$ vektor m-ik kontravariáns koordinátája. Következésképp a $\mathbf{g}_k$ és $\mathbf{g}^p$ bázisvektorok a

$$\boxed{\mathbf{g}_k = g_{kl}\mathbf{g}^l} \quad \text{és} \quad \boxed{\mathbf{g}^p = g^{pm}\mathbf{g}_m} \tag{2.10}$$

alakban írhatók fel. Szavakban: az indexemelés és süllyesztés $(2.9\mathrm{b})_{1,2}$ alatti szabályai a bázisvektorokra is vonatkoznak. A $(2.10)_{1,2}$ összefüggések következménye, hogy

$$\underbrace{\mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}^p}_{\delta_k{}^p} = g_{kl}g^{pm}\underbrace{\mathbf{g}^l \cdot \mathbf{g}_m}_{\delta^l{}_m} = g_{kl}g^{pm}\delta^l{}_m = g_{kl}g^{lp}$$

avagy, elhagyva a lépéseket, hogy

$$\delta_k{}^p = g_{kl}\, g^{lp}\,. \tag{2.11}$$

Kiírva a képletben szereplő objektumok mátrixait

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\delta_k{}^p} = \underbrace{\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix}}_{g_{kl}} \underbrace{\begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{bmatrix}}_{g^{lp}}$$

az eredmény, ami azt jelenti, hogy a $[g_{kl}]$ mátrix a $[g^{lp}]$ mátrix inverze és viszont. A fenti képlet alapján azt fogjuk, mondani, hogy a b_{kl} és a d^{lp} sokaságok egymás inverzei, ha fennáll a

$$b_{kl}\, d^{lp} = \delta_k{}^p \tag{2.12}$$

egyenlet. Ezzel a szóhasználattal élve a g_{kl} sokaság a g^{lp} sokaság inverze és viszont. Az inverz fogalmáról másodrendű tenzorok esetén a 6.1.5. alszakaszban esik majd részletesebben szó.

2.1.3. Műveletek vektorok között. Az alábbiak az indexes jelölésmód alkalmazása mellett tekintik át a vektorokkal való műveleteket.

Szorzás skalárral:

Tekintsük az

$$\mathbf{a} = a^k\mathbf{g}_k = a_p\mathbf{g}^p \qquad \text{és} \qquad \mathbf{b} = b^l\mathbf{g}_{lk} = b_q\mathbf{g}^q$$

vektorokat. Ha a

$$\mathbf{c} = c^k\mathbf{g}_k = c_p\mathbf{g}^p$$

vektor az $\mathbf{a}$ vektor és a λ skalár szorzata, akkor

$$\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a}\,, \qquad \text{vagy} \qquad \begin{aligned} c^k &= \lambda a^k \\ c_p &= \lambda a_p \end{aligned}\quad .$$

Additív műveletek:

Az **a** és a **b** vektorok λ és μ skalárokkal súlyozott **c** összege (különbsége) a

$$\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} \pm \mu\mathbf{b}\,, \qquad \text{vagy a} \qquad \begin{aligned} c^k &= \lambda a^k \pm \mu b^k \\ c_p &= \lambda a_p \pm \mu b_p \end{aligned} \quad .$$

módon írható.

Ismét hangsúlyozzuk a (2.5) egyenletet követő bekezdés lényegét: a szabad indexek egy egyenlet minden tagjában azonos (vagy felső), vagypedig alsó indexpozícióban kell, hogy legyenek.

A fenti képletek jól szemléltetik az indexes jelölésmód ama előnyét, hogy nem kell feltüntetni a vektoriális egyenletek írása során a bázisvektorokat.

Skaláris szorzás:

Kihasználva a (2.3b) összefüggést, illetve az indexemelés és süllyesztés $(2.9\text{b})_{1,2}$ alatti szabályát a

$$\begin{aligned} c = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_p \mathbf{g}^p \, b_q \mathbf{g}^q = \underbrace{a_p \, g^{pq} b_q}_{a^q} = a^q \, b_q = \\ = a_p \underbrace{g^{pq} b_q}_{b^p} = a_p \, b^p = \underbrace{a_p}_{a^q g_{qp}} \, b^p = a^q g_{qp} \, b^p \end{aligned} \tag{2.13}$$

alakban kapjuk az **a** és **b** vektorok skalárszorzatát.

A (2.13) egyenlet egy jelölésbeli megállapodást tükröz: ha nem egymás mellett álló vektorok között kell végrehajtani skaláris (vagy vektoriális) szorzást, akkor azt a fentieknek megfelelő felül nyitott téglalapszerű vonalazás segítségével szedjük, oly módon, hogy a műveleti jel a vízszintes vonalszakasz közepén jelenik meg. Az is kiolvasható, mint szabály a fenti képletből, hogy néma indexpár esetén az egyik lesüllyesztése a másik felemelésével kell, hogy társuljon és viszont és ez a szabály mindig érvényes, hiszen a néma indexpár két különböző indexpozíciójú bázisvektor skaláris szorzatából ered. A néma indexek persze átnevezhetők:

$$a^q \, b_q = a_p \, b^p = a_k \, b^k \,.$$

Vektoriális szorzás:

Az **a** és a **b** vektorok **c** vektoriális szorzata a bázisvektorok vektoriális szorzatát adó $(1.27)_{1,2}$ képletek felhasználásával írhatók fel

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = a^q \, b^l \mathbf{g}_k \times \mathbf{g}_l = \varepsilon_{klm} a^k b^l \mathbf{g}^m = c_m \mathbf{g}^m = \mathbf{c}\,,$$

azaz

$$\boxed{c_m = \varepsilon_{klm} a^k b^l\,,} \tag{2.14a}$$

illetve

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = a_p \, b_q \mathbf{g}^p \times \mathbf{g}^q = \varepsilon^{pqr} a_p b_q \mathbf{g}_r = c^r \mathbf{g}_r = \mathbf{c}\,,$$

azaz

$$\boxed{c^r = \varepsilon^{pqr} a_p b_q\,.} \tag{2.14b}$$

Az indexemelés (indexsüllyesztés) $(2.9\text{b})_{1,2}$ alatti szabályait kihasználva átalakítható a (2.14b) egyenlet:

$$c_m = c^r g_{rm} = \varepsilon^{pqr} g_{rm} a_p b_q = \underbrace{\varepsilon^{pqr} g_{rm} g_{pk} g_{ql}}\, a^k b^l \,.$$

Másrészt a (2.14a) képlet szerint:

$$c_m = \underbrace{\varepsilon_{klm}}\, a^k b^l$$

Egyenlőség csak akkor lehetséges, ha megegyeznek egymással a kapcsos zárójellel megjelölt részek:

(2.15a) $$\boxed{\varepsilon_{klm} = \varepsilon^{pqr} g_{pk} g_{ql} g_{rm} \,.}$$

Ugyanilyen módon igazolható, hogy

(2.15b) $$\boxed{\varepsilon^{pqr} = \varepsilon_{klm} g^{kp} g^{lq} g^{mr} \,.}$$

A (2.15a,b) összefüggések szerint [az alsóindexes] {a felsőindexes} epszilon tenzor úgy kapható meg [a felsőindexes] {az alsóindexes} epszilon tenzorból, hogy az utóbbi valamennyi indexét [lesüllyesztjük]{felemeljük}.

Vegyes szorzat:

Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok d vegyes szorzata a (2.14b) összefüggésből következő

$$d = [\mathbf{abc}] = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \varepsilon^{pqr} a_p b_q \underbrace{\mathbf{g}_r \, c_s \mathbf{g}^s}_{\llcorner \,.\, \lrcorner} = \varepsilon^{pqr} a_p b_q c_s \delta_r{}^s = \varepsilon^{pqr} a_p b_q c_s$$

képlet alapján a

(2.16a) $$\boxed{d = \varepsilon^{pqr} a_p b_q c_s}$$

alakban írható fel. Hasonlóan kapjuk, hogy

(2.16b) $$\boxed{d = \varepsilon_{klm} a^k b^l c^m \,.}$$

Diádikus szorzat:

Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ vektorok diádikus szorzata másodrendű tenzor, amelyet a

$$\boldsymbol{C} = \mathbf{a}\otimes\mathbf{b}$$

módon írunk, ahol $\otimes$ a diádikus szorzás műveleti jele. Figyelembe véve az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ különböző előállításait a $\boldsymbol{C}$ tenzor a

(2.17)
$$\begin{aligned}
\boldsymbol{C} &= \underbrace{a_p b_q}_{c_{pq}} \mathbf{g}^p \otimes \mathbf{g}^q = c_{pq}\, \mathbf{g}^p \otimes \mathbf{g}^q = \\
&= \underbrace{a_p b_q g^{qs}}_{c_p{}^s} \mathbf{g}^p \otimes \mathbf{g}_s = c_p{}^s\, \mathbf{g}^p \otimes \mathbf{g}_s = \\
&= \underbrace{a_p g^{pr} b_q}_{c^r{}_q} \mathbf{g}_r \otimes \mathbf{g}^q = c^r{}_q\, \mathbf{g}_r \otimes \mathbf{g}^q = \\
&= \underbrace{a_p g^{pr} b_q g^{qs}}_{c^{rs}} \mathbf{g}_r \otimes \mathbf{g}_s = c^{rs}\, \mathbf{g}_r \otimes \mathbf{g}_s
\end{aligned}$$

alakokban írható fel, ahol általában

$$c_p{}^s \neq c^s{}_p \,.$$

A (2.17) képletben álló $\mathbf{g}^p\otimes\mathbf{g}^q$ etc. diádok a bázistenzorok, melyek indexei balról jobbra haladva ugyanabban a sorrendben követik egymást, mint néma párjaik a c mellett. Mivel indexes jelölésmódban sem a bázisvektorokat, sem pedig a bázistenzorokat nem írjuk ki az egyszerű írásmód biztosítása kedvéért az elhagyott bázistenzorokban álló bázisvektorok sorrendjét a kiírt tagok szabadindexeinek sorrendje határozza meg. Tekintsük erre példaként az eddig megismert objektumok segítségével felírt

$$d_{lm} = -\varepsilon_{lms} d^s$$

egyenletet, amelyben pirossal szedtük a szabadindexeket.

Előfordulhat, hogy valamilyen okból eltér egymástól egy indexes jelölésmódban írt egyenletben az egyes tagok szabadindexeinek sorrendje. Ez esetben az a megállapodás,

hogy a tényleges sorrendet az egyenlet baloldala, vagypedig a baloldalon álló legelső tag határozza meg. Ezzel a megállapodással élve a fenti egyenlet a

$$d_{lm} = \varepsilon_{mls} d^s$$

alakban is megadható.

Bár az utóbbi megállapodás egyértelműen meghatározza a bázistenzort alkotó bázisvektorok sorrendjét, lehetőség szerint törekedni kell arra, hogy indexes jelölésmódban írt egyenletek esetén minden tagban azonos legyen a szabadindexek sorrendje.

Gyakorlatok

1. Vizsgálja meg, hogy melyik kifejezés értelmes indexes jelölésmódban a lentiek közül. Írja ki részletesen az értelmes kifejezéseket.

   i. $a_k{}^k$ **ii.** $a_{mn} b^n$ **iii.** $c^m a_{mn}$ **iv.** $c^m a_{mm}$

   v. $a_{kk} b^{pq}$ **vi.** $a_{kr} b^{kr}$ **vii.** $a^r{}_m c^{mn}$ **viii.** $e^{ijk} a_{jk}$

2. Azonos vagy eltérő jelentésűek-e a

   i. $a_m{}^n\, d_n$ **ii.** $d_r\, a_s{}^r$ **iii.** $a_{mn} c^{mn}$ **iv.** $a_{rs} c^{sr}$

   kifejezések?

3. Mutassa meg, hogy

   $$a_{kl} b^k b^l = 0\,,$$

   ha $a_{kl} = -a_{lk}$.

4. Igazolja indexes jelölésmódban, hogy

   $$[\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]\cdot\mathbf{g}_k = a_r c^r\, b_k - a_r b^r\, c_k$$

   és, hogy

   $$[(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}]\cdot\mathbf{g}_k = a_r c^r\, b_k - b_r c^r\, a_k\,.$$

   (Vegyük észre, hogy a fenti összefüggések helyességének igazolása valójában az (1.3) alatti kifejtési tétel helyességének igazolását jelenti!)

5. Mutassa meg indexes jelöléseket alkalmazva, hogy

   $$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = a_r c^r\, b_k d^k - a_r d^r\, b_k c^k\,.$$

6. Igazolja indexes jelölésmódban, hogy

   $$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = [\mathbf{cda}]\,\mathbf{b} - [\mathbf{cdb}]\,\mathbf{a}\,.$$

7. Igazolja, szimbolikus-, majd ezt követően indexes jelölésmódban, hogy kollineárisak az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{c}$ vektorok, ha fennállnak az

   $$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}\,, \qquad \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\neq 0\,, \qquad \mathbf{c}\cdot\mathbf{b}\neq 0$$

   összefüggések.

8. Az

   $$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) + \mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) + \mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathbf{0}$$

   egyenlet az ún. Jacobi-féle azonosság. Igazolja az azonosság fennállását.

3. FEJEZET

A determináns

3.1. A determináns és az adjungált

3.1.1. Determináns indexes jelöléssel. A determináns a mátrixnak tekintett $a^p{}_q$ objektum elemeiből képezhető, mint az összes olyan háromtényezős szorzat összege, amelyben a szorzatok minden sorból és minden oszlopból csak egy-egy elemet tartalmaznak, előjelüket pedig az dönti el, hogy növekvő sorszám (oszlopszám) szerint rendezve a szorzótényezőket a sorszámok (oszlopszámok) által alkotott hármasok páros vagy páratlan permutációi-e az 1,2 és 3 számoknak: páros permutáció esetén pozitív, páratlan permutáció esetén negatív az előjel.

A determinánst az

$$|\,a^m{}_n| = \det(a^p{}_q) = \begin{vmatrix} a^1{}_1 & a^1{}_2 & a^1{}_3 \\ a^2{}_1 & a^2{}_2 & a^2{}_3 \\ a^3{}_1 & a^3{}_2 & a^3{}_3 \end{vmatrix} \tag{3.1}$$

módokon jelöljük.

A jól ismert első sor szerinti kifejtéssel

$$|\,a^m{}_n| = a^1{}_1(a^2{}_2a^3{}_3 - a^2{}_3a^3{}_2) - a^1{}_2(a^2{}_1a^3{}_3 - a^2{}_3a^3{}_1) + a^1{}_3(a^2{}_1a^3{}_2 - a^2{}_3a^3{}_1) \tag{3.2a}$$

a determináns értéke. Némi számolással és a permutációs szimbólum tulajdonságainak felhasználásával ellenőrizhető, hogy a

$$\begin{aligned} |\,a^m{}_n| &= e^{pqr}\overbrace{a^1{}_p}^{\text{1. sor}}\overbrace{a^2{}_q}^{\text{2. sor}}\overbrace{a^3{}_r}^{\text{3. sor}} = \\ e^{1qr} \qquad &= a^1{}_1a^2{}_2a^3{}_3 - a^1{}_1a^2{}_3a^3{}_2 + \\ e^{2qr} \qquad &+ a^1{}_2a^2{}_3a^3{}_1 - a^1{}_2a^2{}_1a^3{}_3 + \\ e^{3qr} \qquad &+ a^1{}_3a^2{}_1a^3{}_2 - a^1{}_3a^2{}_2a^3{}_1 \end{aligned} \tag{3.2b}$$

képlet is az első sor szerinti kifejtése a determinánsnak hiszen a p index az oszlopokat számlálja.

Ha felcseréljük a p-t és q-t a permutációs szimbólumban, akkor előjelváltás következik be. Ha emellett a p-t q-ra, a q-t pedig p-re nevezzük át a

$$-|\,a^m{}_n| = e^{qpr}a^1{}_pa^2{}_qa^3{}_r = e^{pqr}a^2{}_pa^1{}_qa^3{}_r$$

alakot kapjuk, ami azt tükrözi, hogy a sorcsere előjelváltozást eredményez.

Visszaidézve, hogy $e^{123} = 1$ átírható a 3.2b képlet az alábbi alakba:

$$e^{\boxed{123}}\,|\,a^m{}_n| = e^{pqr}\,a^{\boxed{1}}{}_p\,a^{\boxed{2}}{}_q\,a^{\boxed{3}}{}_r\ .$$

Innen, egymástól különböző betűket téve a téglalapocskákban álló számok helyére, az

$$\boxed{e^{ijk}|\,a^m{}_n| = e^{pqr}a^i{}_pa^j{}_qa^k{}_r} \tag{3.3}$$

eredmény következik. Szorozzunk most át e_{ijk}-val és használjuk ki, ijk-t gondolva klm helyére, az (1.30b) összefüggést:

$$\underbrace{e_{ijk}e^{ijk}}_{6}|\,a^m{}_n| = e_{ijk}e^{qpr}a^i{}_p a^j{}_q a^k{}_r\,.$$

Innen

$$\boxed{|a^m{}_n| = \frac{1}{3!}\,e_{ijk}\,e^{pqr}a^i{}_p a^j{}_q a^k{}_r} \tag{3.4a}$$

a determináns értéke. Ugyanígy igazolható, hogy

$$\boxed{|a_{mn}| = \frac{1}{3!}\,e^{ijk}\,e^{pqr}a_{ip}a_{jq}a_{kr}\,,} \tag{3.4b}$$

$$\boxed{|a^{mn}| = \frac{1}{3!}\,e_{ijk}\,e_{pqr}a^{ip}a^{jq}a^{kr}} \tag{3.4c}$$

és, hogy

$$\boxed{|a_m{}^n| = \frac{1}{3!}\,e^{ijk}\,e_{pqr}a_i{}^p a_j{}^q a_k{}^r\,.} \tag{3.4d}$$

Vegyük észre, hogy a fenti négy képlet azonos szerkezetű, bármelyik jobboldala megkapható a másikból, ha alkalmas indexemeléseket, illetve indexsüllyesztéseket végzünk.

3.1.2. Az adjungált és az inverz. Feltételezzük a továbbiakban, hogy az indexként álló nagybetű rögzített (nem futó) indexértéket jelöl. Tekintsük az

$$e^{Ijk}e_{Rst}\,a^s{}_j\,a^t{}_k$$

szorzatot. Ha ebben az összegben a nem zérus tagokat keressük csak, akkor fel kell tételeznünk, hogy

$$I \neq j \neq k \qquad \text{és} \qquad R \neq s \neq t\,.$$

(Feltételezzük továbbá, ez ui. nem sérti az általánosságot, hogy párosak a szorzatot számítása során az elsőként tekintett IJK és RST permutációk.) A fenti szorzatot adó összeg számítása során minden lehetséges esetet a rögzített IJK és RST indexekkel adunk majd meg. Legyen $A^I{}_R$ az összeg fele. Ezzel a jelöléssel és az összes lehetőség figyelembevételével

$$\begin{aligned} 2A^I{}_R &= e^{Ijk}e_{Rst}\,a^s{}_j\,a^t{}_k = \\ &= a^S{}_J\,a^T{}_K + a^T{}_K\,a^S{}_J - a^S{}_K\,a^T{}_J - a^T{}_J\,a^S{}_K = 2\left(a^S{}_J\,a^T{}_K - a^S{}_K\,a^T{}_J\right) \end{aligned} \tag{3.5}$$

az összeg, ahonnan – visszatérve a megszokott kis indexekhez – a

$$\boxed{A^i{}_r = \frac{1}{2}\,e^{ijk}e_{rst}\,a^s{}_j\,a^t{}_k} \tag{3.6}$$

alakban írjuk az $A^i{}_r$-et. Az $A^i{}_r$ jelentése az $A^i{}_r$ (3.5) alatti részletes kiírásából olvasható ki. Eszerint $A^i{}_r$ az $a^r{}_i$-hez (az r-ik sorhoz és i-ik oszlophoz) tartozó előjeles aldeterminánsa. Valóban, ha pl. $I=2$, $R=3$, akkor $J=3$, $K=1$ és $S=1$, $T=2$; következőleg

$$A^2{}_3 = a^1{}_3\,a^2{}_1 - a^1{}_1\,a^2{}_3\,,$$

ami az $a^3{}_2$-höz tartozó előjeles aldeterminánsa.

Az állítás általánosabb igazolását adja az alábbi átalakítás:

$$a^m{}_n\, A^n{}_p = a^m{}_n\, \frac{1}{2}\, e^{nuv}\, e_{pqr}\, a^q{}_u\, a^r{}_v = \frac{1}{2}\, e_{pqr}\ \underbrace{e^{nuv}\, a^m{}_n a^q{}_u\, a^r{}_v}_{\text{a (3.3) szerint } |a^k{}_l| e^{mqr}} =$$

$$= \frac{1}{2}\, \underbrace{e^{mqr}\, e_{pqr}}_{2\delta^m{}_p} |a^k{}_l| = |a^k{}_l| \delta^m{}_p\ ,$$

ahonnan

$$\boxed{a^m{}_n\, \frac{A^n{}_p}{|a^k{}_l|} = \delta^m{}_p\ .} \tag{3.7}$$

Ugyanilyen módon mutatható meg, hogy

$$\boxed{\begin{aligned} A^{ir} &= \frac{1}{2}\, e^{ijk} e^{rst}\, a_{sj}\, a_{tk}\ , \\ A_{ir} &= \frac{1}{2}\, e_{ijk} e_{rst}\, a^{sj}\, a^{tk}\ , \end{aligned}} \tag{3.8}$$

és

$$\boxed{A_i{}^r = \frac{1}{2}\, e_{ijk} e^{rst}\, a_s{}^j\, a_t{}^k\ ,} \tag{3.9}$$

amivel

$$\boxed{\begin{aligned} a_{mn}\, \frac{A^{np}}{|a_{sj}|} = \delta_m{}^p\ , \qquad & a^{mn}\, \frac{A_{np}}{|a^{sj}|} = \delta^m{}_p\ , \\ a_m{}^n\, \frac{A_n{}^p}{|a_s{}^j|} &= \delta_m{}^p\ . \end{aligned}} \tag{3.10}$$

A (3.6), (3.8) és (3.9) összefüggések értelmezik az $a^k{}_i$, a_{ki}, a^{ki} és $a_k{}^i$ sokaságok (objektumok) $A^i{}_r$, A^{ir}, A_{ir} és $A_i{}^r$ *adjungáltjait.*

A (3.7) és (3.10) képletekben álló

$$\frac{A^n{}_p}{|a^k{}_l|}\ , \qquad \frac{A^{np}}{|a_{sj}|}\ , \qquad \frac{A_{np}}{|a^{sj}|}\ , \qquad \text{valamint} \qquad \frac{A_n{}^p}{|a_s{}^j|}$$

törtek pedig tekintettel a (2.12) képletre és képlet kapcsán mondottakra az $a^m{}_n$, a_{mn}, a^{mn} és $a_m{}^n$ sokaságok (objektumok) inverzeit adják.

3.2. Alkalmazások

3.2.1. Determinánsok szorzástétele. Tekintsük a

$$c_u{}^v = a_u{}^s\, b_s{}^v$$

szorzatot. A szorzat determinánsa a (3.4d) képlet alapján a (3.3) figyelembevételével számítható:

$$|c_f{}^d| = \frac{1}{3!}\, e^{pqr}\, e_{klm}\, c_p{}^k c_q{}^l c_r{}^m = \frac{1}{3!}\, e^{pqr}\, e_{klm}\, a_p{}^h b_h{}^k\, a_q{}^i b_i{}^l\, a_r{}^j b_j{}^m = \tag{3.11}$$

$$= \frac{1}{3!}\, \underbrace{e^{pqr}\, a_p{}^h\, a_q{}^i\, a_r{}^j}_{e^{hij}|a_w{}^z|}\, \underbrace{e_{klm}\, b_h{}^k\, b_i{}^l\, b_j{}^m}_{e_{hij}|b_s{}^t|} = \frac{1}{3!}\, \underbrace{e^{hij}\, e_{hij}}_{3!}\, |a_w{}^z||b_s{}^t| = |a_w{}^z||b_s{}^t|$$

Szavakban: két mátrix szorzatának determinánsa a mátrixok determinánsainak szorzata. Ez az eredmény a determinánsok szorzástétele néven ismert. A tétel egy alkalmazásaként tekintsük a

$$g_{kl}\, g^{lq} = \delta_k{}^q \tag{3.12}$$

szorzatot. Legyen

$$g_o = |g_{kl}| \qquad \text{és} \qquad g^o = |g^{lq}|\,. \tag{3.13}$$

Az (3.12) baloldalának $g_o g^o$ a determinánsa, a jobboldalnak pedig

$$|\delta_k{}^q| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\,.$$

Következésképp

$$\boxed{g_o\, g^o = 1\,.} \tag{3.14}$$

3.2.2. A bázisvektorok vegyes szorzata és a metrikus tenzor determinánsa. Mivel a $(2.10)_1$ alapján

$$\mathbf{g}_1 = g_{1p}\mathbf{g}^p\,, \qquad \mathbf{g}_2 = g_{2q}\mathbf{g}^q\,, \qquad \mathbf{g}_3 = g_{3s}\mathbf{g}^s$$

az (1.28a,b) és az (1.22) képletek felhasználásával írható, hogy

$$\gamma_o = [\mathbf{g}_1\mathbf{g}_2\mathbf{g}_3] = g_{1p}\, g_{2q}\, g_{3s}\, \underbrace{[\mathbf{g}^p\mathbf{g}^q\mathbf{g}^s]}_{\varepsilon^{pqr}=\gamma^o e^{pqr}} = g_{1p}\, g_{2q}\, g_{3s}\, \frac{1}{\gamma_o}\, e^{pqs}$$

azaz, hogy

$$(\gamma_o)^2 = \underbrace{e^{pqs}\, g_{1p}\, g_{2q}\, g_{3s}}_{g^o} = g_o$$

vagyis

$$\boxed{(\gamma_o)^2 = g_o\,.} \tag{3.15a}$$

Ugyanígy mutatható meg, hogy

$$\boxed{(\gamma^o)^2 = g^o\,.} \tag{3.15b}$$

3.2.3. A permutációs szimbólum, mint determináns. Az alábbiakban megmutatjuk, hogy

$$e_{klm} = \begin{vmatrix} \delta_k{}^1 & \delta_k{}^2 & \delta_k{}^3 \\ \delta_l{}^1 & \delta_l{}^2 & \delta_l{}^3 \\ \delta_m{}^1 & \delta_m{}^2 & \delta_m{}^3 \end{vmatrix}\,. \tag{3.16a}$$

A determinánst kifejtve az első oszlop szerint a

$$\delta_k{}^1\left(\delta_l{}^2\delta_m{}^3 - \delta_m{}^2\delta_l{}^3\right) + \delta_l{}^1\left(\delta_m{}^2\delta_k{}^3 - \delta_k{}^2\delta_m{}^3\right) + \delta_m{}^1\left(\delta_k{}^2\delta_l{}^3 - \delta_l{}^2\delta_2{}^3\right)$$

eredményt kapjuk. A fenti kifejezés értéke

- 0, ha klm nem permutáció (ekkor ui. van legalább két azonos index a klm indexek között, következésképp a determináns legalább két sora azonos);
- 1, ha klm páros permutáció (ekkor ui. (a) klm, lmk, vagy mkl megegyezik az 123-al és így a pirossal szedett szorzatokat magába foglaló tagok egyike 1, a másik kettő pedig zérus, mivel az utóbbi esetben különböznek a δ-k indexei; (b) a kékkel szedett szorzatokat tartalmazó tagok mindegyike zérus, mert itt is különböznek a δ-k indexei);

-1, ha klm páratlan permutáció (ekkor ui. (a) kml, lkm, vagy mlk megegyezik az 123-al és így a kékkel szedett szorzatokat magába foglaló tagok egyike -1, a másik kettő pedig zérus mivel az utóbbi esetben különböznek a δ-k indexei; (b) a pirossal szedett szorzatokat tartalmazó tagok mindegyike zérus, mert itt is különböznek a δ-k indexei).

Ezt kellett bizonyítani.

Hasonló gondolatmenettel adódik, hogy

$$e^{pqr} = \begin{vmatrix} \delta_1{}^p & \delta_1{}^q & \delta_1{}^r \\ \delta_2{}^p & \delta_2{}^q & \delta_2{}^r \\ \delta_3{}^p & \delta_3{}^q & \delta_3{}^r \end{vmatrix} \tag{3.16b}$$

A (3.16a,b) képletek következménye, hogy

$$e_{klm}\, e^{pqr} = \varepsilon_{klm}\, \varepsilon^{pqr} = \begin{vmatrix} \delta_k{}^1 & \delta_k{}^2 & \delta_k{}^3 \\ \delta_l{}^1 & \delta_l{}^2 & \delta_l{}^3 \\ \delta_m{}^1 & \delta_m{}^2 & \delta_m{}^3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \delta_1{}^p & \delta_1{}^q & \delta_1{}^r \\ \delta_2{}^p & \delta_2{}^q & \delta_2{}^r \\ \delta_3{}^p & \delta_3{}^q & \delta_3{}^r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_k{}^p & \delta_k{}^q & \delta_k{}^r \\ \delta_l{}^p & \delta_l{}^q & \delta_l{}^r \\ \delta_m{}^p & \delta_m{}^q & \delta_m{}^r \end{vmatrix} \tag{3.17}$$

Az állítás belátásához a determinánsok szorzástételét kell visszafelé alkalmazni és figyelembe kell venni, hogyha igaz az állítás, akkor a

$$\begin{bmatrix} \delta_k{}^1 & \delta_k{}^2 & \delta_k{}^3 \\ \delta_l{}^1 & \delta_l{}^2 & \delta_l{}^3 \\ \delta_m{}^1 & \delta_m{}^2 & \delta_m{}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1{}^p & \delta_1{}^q & \delta_1{}^r \\ \delta_2{}^p & \delta_2{}^q & \delta_2{}^r \\ \delta_3{}^p & \delta_3{}^q & \delta_3{}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_k{}^p & \delta_k{}^q & \delta_k{}^r \\ \delta_l{}^p & \delta_l{}^q & \delta_l{}^r \\ \delta_m{}^p & \delta_m{}^q & \delta_m{}^r \end{bmatrix}$$

szorzat példaként vett és kékkel szedett eleme az első mátrix második sorának és a második mátrix első oszlopának kell legyen a szorzata. Valóban, kihasználva, hogy egy összeg tömören is írható az összegező index felhasználásával és átnevező operátornak véve az egyik Kronecker deltát azt kapjuk, hogy

$$\delta_l{}^1\delta_1{}^p + \delta_l{}^2\delta_2{}^p + \delta_l{}^3\delta_3{}^p = \delta_l{}^s\delta_s{}^p = \delta_l{}^p\ .$$

Ugyanilyen módon eljárva a fennmaradó nyolc elem esetén megkapjuk végül az állítás teljes igazolását.

Gyakorlatok

1. Igazolja, hogy
$$\frac{\partial g_o}{\partial g_{pq}} = g_o g^{pq}\ .$$
2. Igazolja, az előző feladat alapján, hogy
$$\frac{\partial}{\partial g_{pq}} \ln g_o = g^{pq}\ .$$

4. FEJEZET

Tenzorok

4.1. A másodrendű tenzor

4.1.1. A másodrendű tenzor geometriai fogalma. Elsőként visszaidézzük kissé eltérő jelöléssel az 1.1.3. szakasz néhány eredményét. Tekintsük az egymástól lineárisan független következőleg bázist alkotó $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ és $\mathbf{v}_3$ vektorokat. Ez esetben $[\mathbf{v}_1\,\mathbf{v}_2\,\mathbf{v}_3]\neq 0$ és bázist alkotnak a

$$\overset{*}{\mathbf{v}}{}^1=\frac{\mathbf{v}_2\times\mathbf{v}_3}{[\mathbf{v}_1\,\mathbf{v}_2\,\mathbf{v}_3]}\,,\qquad \overset{*}{\mathbf{v}}{}^2=\frac{\mathbf{v}_3\times\mathbf{v}_1}{[\mathbf{v}_1\,\mathbf{v}_2\,\mathbf{v}_3]}\,,\qquad \overset{*}{\mathbf{v}}{}^3=\frac{\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2}{[\mathbf{v}_1\,\mathbf{v}_2\,\mathbf{v}_3]}$$

reciprok vektorok is. Következőleg tetszőleges $\mathbf{v}$ vektor megadható a

$$\mathbf{v}=p^1\mathbf{v}_1+p^2\mathbf{v}_2+p^3\mathbf{v}_3$$

alakban, ahol a

$$p^1=\mathbf{v}\cdot\overset{*}{\mathbf{v}}{}^1\,,\qquad p^2=\mathbf{v}\cdot\overset{*}{\mathbf{v}}{}^2\,,\qquad \text{és}\qquad p^3=\mathbf{v}\cdot\overset{*}{\mathbf{v}}{}^3 \tag{4.1}$$

skalárok a $\mathbf{v}$ vektor $\mathbf{v}_i$ vektorokra vonatkoztatott koordinátái.

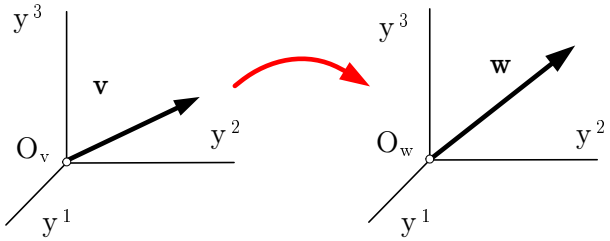
A másodrendű tenzor fogalmának bevezetéseként megvizsgáljuk a *homogén lineáris vektor-vektor függvények* tulajdonságait. Azt mondjuk, hogy homogén lineáris a

$$\mathbf{w}=\mathbf{f}(\mathbf{v}) \tag{4.2}$$

vektor-vektor függvény, ha teljesül az

$$\mathbf{f}(p^1\mathbf{v}_1+p^2\mathbf{v}_2+p^3\mathbf{v}_3)=p^1\mathbf{f}(\mathbf{v}_1)+p^2\mathbf{f}(\mathbf{v}_2)+p^3\mathbf{f}(\mathbf{v}_3) \tag{4.3}$$

függvényegyenlet.



4.1. ábra. A $\mathbf{v}$ vektor leképezése a $\mathbf{w}$ vektorra

Geometriailag a fenti egyenlet olyan függvénynek tekinthető, amely a tetszőleges O_v pontból felmért $\mathbf{v}$ vektorok háromméretű terét leképezi az ugyancsak tetszőleges O_w pontból felmért $\mathbf{w}$ vektorok háromméretű terére – a 4.1. ábra az (y) kartéziuszi KR-ben szemlélteti a leképezést. A $\mathbf{v}$ vektorokat tárgyvektoroknak, a $\mathbf{w}$ vektorokat képvektoroknak nevezzük. Röviden az mondható, hogy a $\mathbf{w}$ vektor a $\mathbf{v}$ vektor képe.

Nem elfajuló a leképezés, ha a $\mathbf{v}$ vektorok teljes terét a $\mathbf{w}$ vektorok teljes terére képezzük le; elfajuló (nem megfordítható) a leképezés, ha a $\mathbf{v}$ vektorok terét síkra, egyenesre, avagy pontra képezzük le.

Jelölje rendre

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{v}_1)\,, \qquad \mathbf{w}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{v}_2) \qquad \text{és} \qquad \mathbf{w}_3 = \mathbf{f}(\mathbf{v}_3) \tag{4.4}$$

a bázist alkotó $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ és $\mathbf{v}_3$ vektorok képeit. Nyilvánvaló a (4.2), (4.3) és (4.4) összefüggések alapján, hogy

$$\mathbf{w} = \mathbf{f}(\mathbf{v}) = \mathbf{f}(p^1\mathbf{v}_1 + p^2\mathbf{v}_2 + p^3\mathbf{v}_3) = p^1\mathbf{w}_1 + p^2\mathbf{w}_2 + p^3\mathbf{w}_3\,. \tag{4.5}$$

Ez az összefüggés azt jelenti, hogy a leképezést egyértelműen meghatározza a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ és $\mathbf{v}_3$ vektorok $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ és $\mathbf{w}_3$ képe. A (4.1) egyenlet és a diád jobboldalról vektorral történő skaláris szorzásának (1.4a) alatti szabálya segítségével tovább alakítható a fenti képlet:

$$\begin{aligned} \mathbf{w} = \mathbf{f}(\mathbf{v}) &= \mathbf{w}_1 \overset{*}{\mathbf{v}}{}^1 \cdot \mathbf{v} + \mathbf{w}_2 \overset{*}{\mathbf{v}}{}^2 \cdot \mathbf{v} + \mathbf{w}_3 \overset{*}{\mathbf{v}}{}^3 \cdot \mathbf{v} = \\ &= \underbrace{\left[\mathbf{w}_1 \otimes \overset{*}{\mathbf{v}}{}^1 + \mathbf{w}_2 \otimes \overset{*}{\mathbf{v}}{}^2 + \mathbf{w}_3 \otimes \overset{*}{\mathbf{v}}{}^3\right]}_{\boldsymbol{W}} \cdot \mathbf{v}\,, \end{aligned} \tag{4.6}$$

ahol

$$\boldsymbol{W} = \mathbf{w}_1 \otimes \overset{*}{\mathbf{v}}{}^1 + \mathbf{w}_2 \otimes \overset{*}{\mathbf{v}}{}^2 + \mathbf{w}_3 \otimes \overset{*}{\mathbf{v}}{}^3 \tag{4.7}$$

a leképezés másodrendű tenzora.

Megjegyzések:

1. A fentiek szerint a tenzor bármilyen bázis és a bázis három képvektora segítségével – ez most a $\mathbf{w}_k$ és a $\overset{*}{\mathbf{v}}{}^k$ hármas – megadható.
2. Ennek ellenére érdemes a tekintett KR-hez igazodni (görbevonalú KR esetén a lokális bázist használni); a következő szakasz ezt kérdést taglalja.

4.1.2. Másodrendű tenzor lokális bázisban. Mivel a ferdeszögű KR bázisvektorait és a görbevonalú KR lokális bázisát kifeszítő bázisvektorokat ugyanúgy jelöltük, az alábbiak mindkét esetre vonatkoznak. A későbbiek kedvéért azonban a görbevonalú KR-el kapcsolatos szóhasználatot részesítjük előnybe.

Jelölje most $\mathbf{a}$ a képvektorokat, és $\mathbf{d}$ a tárgyvektorokat. Az előző szakasz gondolatmenetének lépéseivel, de a görbevonalú KR lokális bázisát véve alapul írhatjuk, hogy

$$\mathbf{a} = \mathbf{f}(\mathbf{d}) = \mathbf{f}(d^1\mathbf{g}_1 + d^2\mathbf{g}_2 + d^3\mathbf{g}_3) = d^1\underbrace{\mathbf{f}\,(\mathbf{g}_1)}_{\mathbf{a}_1} + d^2\underbrace{\mathbf{f}\,(\mathbf{g}_2)}_{\mathbf{a}_2} + d^3\underbrace{\mathbf{f}\,(\mathbf{g}_3)}_{\mathbf{a}_3}\,,$$

ahol d^i a $\mathbf{d}$ vektor $\mathbf{g}_i$-hez tartozó kontravariáns koordinátája, az $\mathbf{a}_i$ pedig a $\mathbf{g}_i$ bázisvektor képe. A fenti képlet a $d^K = \mathbf{g}^K \cdot \mathbf{d}$ és $\mathbf{a}_K\, d^K = \mathbf{a}_K\, \mathbf{g}^K \cdot \mathbf{d} = \mathbf{a}_K \otimes \mathbf{g}^K \cdot \mathbf{d}$ összefüggések figyelembevételével alakítható tovább:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = \mathbf{f}(\mathbf{d}) = \mathbf{f}(d^1\mathbf{g}_1 + d^2\mathbf{g}_2 + d^3\mathbf{g}_3) &= \mathbf{a}_1\, d^1 + \mathbf{a}_2\, d^2 + \mathbf{a}_3\, d^3 = \\ &= \underbrace{\left[\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{g}^1 + \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{g}^2 + \mathbf{a}_3 \otimes \mathbf{g}^3\right]}_{\boldsymbol{A}} \cdot \mathbf{d}\,. \end{aligned}$$

Itt

$$\boldsymbol{A} = \mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{g}^1 + \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{g}^2 + \mathbf{a}_3 \otimes \mathbf{g}^3 = \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{g}^i$$

a leképezés tenzora. Mivel

$$\mathbf{a}_i = a_{ki}\mathbf{g}^k = a^s{}_i\mathbf{g}_s$$

az $\boldsymbol{A}$ tenzor az

$$\boldsymbol{A} = a_{ki}\, \mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}^i = a^s{}_i\, \mathbf{g}_s \otimes \mathbf{g}^i \tag{4.8a}$$

alakokban adható meg. A diádban álló második $\mathbf{g}^i$ bázisvektor i indexének lesüllyesztésével további két alak kapható:

$$\boldsymbol{A} = \underbrace{a_{ki} g^{il}}_{a_k{}^l} \mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}_l = \underbrace{a^s{}_i g^{il}}_{a^{sl}} \mathbf{g}_s \otimes \mathbf{g}_l \,,$$

vagyis

$$\boldsymbol{A} = a_k{}^l \, \mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}_l = a^{sl} \, \mathbf{g}_s \otimes \mathbf{g}_l \,.$$

A fenti képletekben a bázisvektorok $\mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}^i$, $\mathbf{g}_s \otimes \mathbf{g}^i$, $\mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}_l$ és $\mathbf{g}_s \otimes \mathbf{g}_l$ diádikus szorzatait *bázistenzornak* nevezzük.

Figyeljük meg, hogy a diádok a_{ki}, $a^s{}_i$, $a_k{}^l$ és a^{sl} együtthatóinak bármelyike megkapható bármelyik másikból az indexemelés és süllyesztés megismert szabályaival.

Indexes jelölésmódban, amikoris nem írjuk ki a bázistenzort, az a_{ki}, $a^s{}_i$, $a_k{}^l$ és a^{sl} együtthatókat másodrendű tenzornak nevezzük.

A fentiekhez kötődő egyszerű példaként megmutatjuk, hogy a

$$g_{kl} \, \mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}^l \,, \qquad \delta_k{}^l \, \mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}_l \,, \qquad \delta^k{}_l \, \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l \,, \qquad \text{és} \qquad g^{kl} \, \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l$$

tenzorok mindegyike az $\boldsymbol{I}$ egységtenzor, amely minden vektort önmagára képez le.

Valóban, ha a fenti felsorolásban szereplő első két tenzort megszorozzuk jobbról skalárisan az $u_r \, \mathbf{g}^r$ vektorral majd kihasználjuk az indexemelés és süllyesztés szabályait illetve a Kronecker delta indexátnevező operátor voltát, akkor a

$$\boldsymbol{I} \cdot \mathbf{u} = (g_{kl} \, \mathbf{g}^k \otimes \underbrace{\mathbf{g}^l}) \cdot \underbrace{(u^r \, \mathbf{g}_r)} = g_{kl} \, \mathbf{g}^k \delta^l{}_r u^r = g_{kl} \, u^l \, \mathbf{g}^k = u_k \, \mathbf{g}^k \,, \tag{4.9a}$$

valamint a

$$\boldsymbol{I} \cdot \mathbf{u} = (\delta_k{}^l \, \mathbf{g}^k \otimes \underbrace{\mathbf{g}_l}) \cdot \underbrace{(u^r \, \mathbf{g}_r)} = \delta_k{}^l \, \mathbf{g}^k \, g_{lr} \, u^r = \delta_k{}^l u_l \, \mathbf{g}^k = u_k \, \mathbf{g}^k \tag{4.9b}$$

eredményt kapjuk. Ez azt igazolja, hogy a $g_{kl} \, \mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}^l$ és a $\delta_k{}^l \, \mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}_l$ tenzorok az egységtenzorok.

A másik két eset vizsgálatát gyakorlatra hagyjuk.

Indexes jelölésmódban a (4.9a,b) egyenletek az

$$g_{kl} \, u^l = u_k \qquad \text{és} \qquad \delta_k{}^l u_l = u_k \tag{4.10}$$

alakban írhatók fel. Az első a már jól ismert indexsüllyesztés szabálya, a második a Kronecker delta segítségével történő indexátnevezésé. Mivel a (4.10) összefüggés szerint egyik esetben sem változik meg az $\mathbf{u}$ vektor a g_{kl} és $\delta_k{}^l$ mennyiségek az egységtenzort adják indexes jelöléssel.

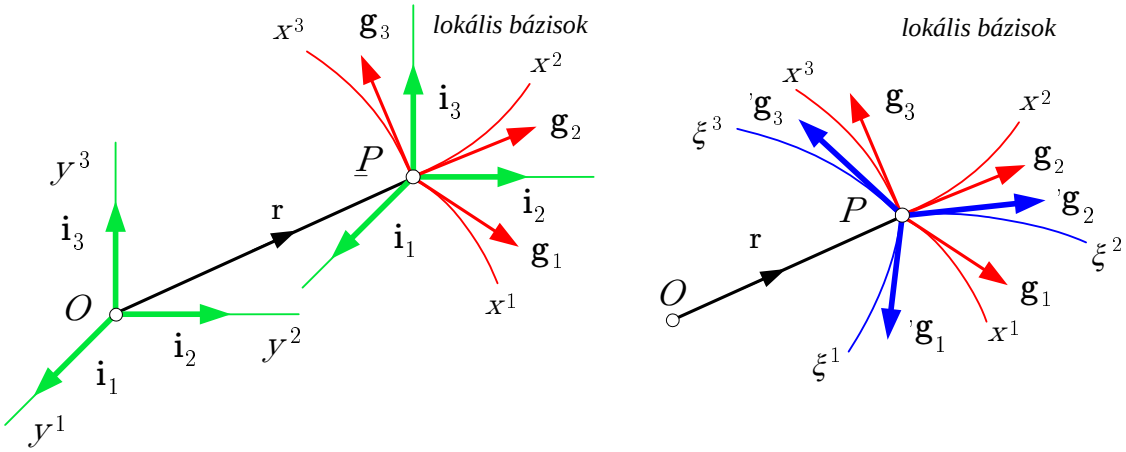
Végezetül megjegyezzük, hogy a metrikus tenzor elnevezés onnan származik, hogy a ds ívelem négyzetének

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^k} \, \mathrm{d}x^k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^l} \, \mathrm{d}x^l \; = \; g_{kl} \mathrm{d}x^k \, \mathrm{d}x^l \tag{4.11}$$

képlete magába foglalja a metrikus tenzort. Ez a mennyiség a tér metrikájának egy jellemzője.

4.2. Tenzorok transzformációja

4.2.1. A kovariáns bázisvektorok transzformációja. A 4.2. ábra baloldala – az (a) jelű ábrarészlet – az (y) kartéziuszi, valamint az (x) görbevonalú KR-t (ez piros színnel van rajzolva) szemlélteti külön is feltüntetve a P ponthoz tartozó lokális bázisokat. Az ábra jobboldal – (b) jelű ábrarészlet – két görbevonalú KR esetén szemlélteti a lokális bázisokat. Ezek közül az első a baloldali ábrarészleten már szereplő (x) görbevonalú KR,



4.2. ábra. (a) Egyenes és görbevonalú KR-ek (b) Két görbevonalú KR

a második pedig az (ξ^1, ξ^2, ξ^3), vagy tömör jelöléssel az (ξ) görbevonalú KR.

Valamely skalár, vektor illetve tenzor megadható bármelyik, azaz mind az (y) kartéziuszi, mind pedig az (x) és az (ξ) görbevonalú KR-ben. A továbbiakban azt a kérdést vizsgáljuk, hogy miként számíthatók át ezek a mennyiségek az egyik KR-ből a másikba. Magát az átszámítást, erre utal közvetlenül a jelen 4.2. szakasz címe is, tenzorok transzformációjának nevezzük. Az (y) és (x), valamint az (x) és (ξ) KR-ek közötti transzformációs szabályokat egymással párhuzamosan tekintjük át, oly módon, hogy a baloldali oszlopban az (y) és (x) KR-ek közötti összefüggések, a jobboldali oszlopban pedig az (x) és (ξ) KR-ek közötti összefüggések szerepelnek majd.

A jelölések egyértelművé tétele kedvéért abban állapodunk meg, hogy a vektorok, a másod-, vagy magasabbrendű tenzorok betűjele minden koordináta-rendszerben ugyanaz. A különbségtételt a vektort, tenzort azonosító betű előtt felső indexként megjelenő aposztróf segíti majd az (y) kartéziuszi és (ξ) görbevonalú KR esetén. Ez a megállapodás nem okozhat félreértést mivel a két esetet, a fentiek szerint párhuzamosan tárgyaljuk majd.

Nem alkalmazzuk az aposztróf jelet olyan mennyiségekre, amelyeknek különböző a betűjele (tehát az (y) KR bázisvektorai esetén, illetve a koordináták esetén). Tovább segíti a megkülönböztetést a jelen a 4.2. alszakaszban valamint az 5. fejezetben a fenti ábrával összhangban álló színek alkalmazása az indexek esetén.

Mivel kartéziuszi az (y) KR az (1.19b) és (1.20)alapján fennállnak a

$$\text{(4.12a)} \qquad \mathbf{i}^K = \mathbf{i}_K\,, \qquad {}'g_{kl} = {}'\delta_{kl}\,, \qquad \text{és} \qquad {}'g^{kl} = {}'\delta^{kl}$$

összefüggések. Ez egyben azt jelenti, hogy bármely kartéziuszi KR-ben a g_{kl} és g^{kl} metrikus tenzorok megegyeznek az alsó-, illetve felsőindexes Kronecker deltával.

A P pont helyvektora az

$$\text{(4.13)} \quad \begin{aligned} \mathbf{r} &= y^1\,(x^1,x^2,x^3)\mathbf{i}_1 + y^2\,(x^1,x^2,x^3)\mathbf{i}_2 + y^3\,(x^1,x^2,x^3)\mathbf{i}_3 = \\ &= y^1\,\mathbf{i}_1 + y^2\,\mathbf{i}_2 + y^3\,\mathbf{i}_3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}(x^1,x^2,x^3) \\ &= \mathbf{r}(\xi^1,\xi^2,\xi^3) \end{aligned}$$

alakban adható meg, ahol kölcsönösen egyértelműek az

$$\text{(4.14a)} \qquad x^i = x^i(y^1\,,y^2\,,y^3)\,, \qquad \text{valamint az} \qquad x^i = x^i(\xi^1,\xi^2,\xi^3)$$

függvények, azaz

$$\text{(4.14b)} \qquad J_{x,\,y} = \left|\frac{\partial x^k}{\partial y^{\,r}}\right| \neq 0 \qquad \text{és} \qquad J_{x,\,\xi} = \left|\frac{\partial x^k}{\partial \xi^{\,r}}\right| \neq 0\,.$$

A bázisvektorok számításával kapcsolatos (1.40) összefüggés alapján

$$\mathbf{i}_k = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^k} = \underbrace{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^s}}_{\mathbf{g}_s} \underbrace{\frac{\partial x^s}{\partial y^k}}_{t_k{}^s} = \mathbf{g}_s \frac{\partial x^s}{\partial y^k} \qquad \text{és} \qquad {}'\mathbf{g}_k = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^k} = \underbrace{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^s}}_{\mathbf{g}_s} \underbrace{\frac{\partial x^s}{\partial \xi^k}}_{t_k{}^s} = \mathbf{g}_s \frac{\partial x^s}{\partial \xi^k} ,$$

vagy ami ugyanaz

(4.15a) $$\mathbf{i}_k = \mathbf{g}_s \frac{\partial x^s}{\partial y^k} = t_k{}^s \, \mathbf{g}_s \qquad \text{és} \qquad \boxed{{}'\mathbf{g}_k = \mathbf{g}_s \frac{\partial x^s}{\partial \xi^k} = t_k{}^s \, \mathbf{g}_s \, .}$$

Ha skalárisan megszorozzuk az utóbbi egyenletet $\mathbf{g}^l$-el, akkor a

$$\mathbf{i}_k \cdot \mathbf{g}^l = \frac{\partial x^s}{\partial y^k} \, \mathbf{g}_s \cdot \mathbf{g}^l = t_k{}^s \underbrace{\mathbf{g}_s \cdot \mathbf{g}^l}_{\delta_s{}^l} = t_k{}^l \qquad | \qquad {}'\mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}^l = \frac{\partial x^s}{\partial \xi^k} \, \mathbf{g}_s \cdot \mathbf{g}^l = t_k{}^s \underbrace{\mathbf{g}_s \cdot \mathbf{g}^l}_{\delta_s{}^l} = t_k{}^l$$

illetve a

(4.15b) $$t_k{}^l = \frac{\partial x^l}{\partial y^k} = \mathbf{i}_k \cdot \mathbf{g}^l \qquad | \qquad \boxed{t_k{}^l = \frac{\partial x^l}{\partial \xi^k} = {}'\mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}^l}$$

eredményt kapjuk. A $(4.15a)_{1,2}$ képletek a $\mathbf{g}_s$ bázisvektorok (y), illetve (ξ) KR-be való transzformációjának összefüggései. A $(4.15b)_{1,2}$ képletek a transzformáció $t_k{}^l$ objektumait értelmezik.

A $(4.15a,b)_{1,2}$ képletekre vezető gondolatmenet ismétlésével kapjuk meg a $\mathbf{g}_l$-t $\mathbf{i}_m$-el illetve ${}'\mathbf{g}_m$-el kifejezve:

$$\mathbf{g}_l = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^l} = \underbrace{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^m}}_{\mathbf{i}_m} \underbrace{\frac{\partial y^m}{\partial x^l}}_{\tau_l{}^m} = \mathbf{i}_m \, \tau_l{}^m \qquad | \qquad \mathbf{g}_l = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^l} = \underbrace{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^m}}_{{}'\mathbf{g}_m} \underbrace{\frac{\partial \xi^m}{\partial x^l}}_{\tau_l{}^m} = {}'\mathbf{g}_m \tau_l{}^m$$

azaz

(4.16a) $$\mathbf{g}_l = \frac{\partial y^m}{\partial x^l} \, \mathbf{i}_m = \tau_l{}^m \, \mathbf{i}_m \qquad | \qquad \boxed{\mathbf{g}_l = \frac{\partial \xi^m}{\partial x^l} \, {}'\mathbf{g}_m = \tau_l{}^m \, {}'\mathbf{g}_m \, .}$$

A fenti egyenletből az $\mathbf{i}^k$, illetve a $\mathbf{g}^k$ bázisvektorokkal történő skaláris szorzással a

$$\mathbf{g}_l \cdot \mathbf{i}^k = \frac{\partial y^m}{\partial x^l} \underbrace{\mathbf{i}_m \cdot \mathbf{i}^k}_{{}'\delta_m{}^k} = \tau_l{}^k \qquad | \qquad \mathbf{g}_l \cdot {}'\mathbf{g}^k = \frac{\partial \xi^m}{\partial x^l} \underbrace{{}'\mathbf{g}_m \cdot {}'\mathbf{g}^k}_{{}'\delta_m{}^k} = \tau_l{}^k$$

illetve a

(4.16b) $$\tau_l{}^k = \frac{\partial y^k}{\partial x^l} = \mathbf{g}_l \cdot \mathbf{i}^k \qquad | \qquad \boxed{\tau_l{}^k = \frac{\partial \xi^m}{\partial x^l} = \mathbf{g}_l \cdot {}'\mathbf{g}^k}$$

eredményt kapjuk. A (4.16b) képletekkel értelmezett $\tau_l{}^k$ ugyancsak transzformációs objektum.

4.2.2. Összefüggés a transzformációs objektumok között. Az ívelemvektor számítására szolgáló

(4.17) $$\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathrm{d}x^l \, \mathbf{g}_l = \mathrm{d}y^k \, \mathbf{i}_k \qquad | \qquad \mathrm{d}\mathbf{r} = \mathrm{d}x^l \mathbf{g}_l = \mathrm{d}\xi^k \, {}'\mathbf{g}_k \, ,$$

képletekben, tekintettel a (4.15a)-ra is

$$\mathrm{d}y^k = \frac{\partial y^k}{\partial x^l} \, \mathrm{d}x^l \, , \quad \mathbf{i}_k = \frac{\partial x^s}{\partial y^k} \, \mathbf{g}_s \qquad \text{és} \qquad \mathrm{d}\xi^k = \frac{\partial \xi^k}{\partial x^l} \, \mathrm{d}x^l \, , \quad {}'\mathbf{g}_k = \frac{\partial x^s}{\partial \xi^k} \, \mathbf{g}_s \, .$$

Ha behelyettesítjük az utóbbi összefüggéseket a (4.17)-be, és elhagyjuk mindkét oldalon a $\mathrm{d}x^l$-et, akkor kapjuk, hogy

$$\mathbf{g}_l = \frac{\partial y^k}{\partial x^l}\,\frac{\partial x^s}{\partial y^k}\,\mathbf{g}_s \qquad \text{és} \qquad \mathbf{g}_l = \frac{\partial \xi^{\,k}}{\partial x^l}\,\frac{\partial x^s}{\partial \xi^{\,k}}\,\mathbf{g}_s\,. \tag{4.18}$$

Egyenlőség csak akkor lehetséges, ha

$$\frac{\partial y^k}{\partial x^l}\,\frac{\partial x^s}{\partial y^k} = \delta_l{}^s \qquad \text{és} \qquad \boxed{\frac{\partial \xi^{\,k}}{\partial x^l}\,\frac{\partial x^s}{\partial \xi^{\,k}} = \delta_l{}^s\,,} \tag{4.19a}$$

vagy a (4.15b)-re, valamint a (4.16b)-re is tekintettel, ha

$$\tau_l{}^k\,t_k{}^s = \delta_l{}^s \qquad | \qquad \boxed{\tau_l{}^k\,t_k{}^s = \delta_l{}^s\,.} \tag{4.19b}$$

Ugyanígy igazolható, hogy

$$t_r{}^l\tau_l{}^s = {}'\delta_r{}^s \qquad | \qquad \boxed{t_r{}^l\tau_l{}^s = {}'\delta_r{}^s\,.} \tag{4.19c}$$

Tekintettel a determinánsok 3.2.1. alszakaszban ismertetett szorzástételére – konkrétan a (3.11) összefüggésre – írhatjuk, hogy

$$|\,\tau_l{}^k\,t_k{}^s| = |\,\delta_l{}^s|\,, \quad \text{vagy} \quad \underbrace{|\,\tau_l{}^k\,|}_{t}\,\underbrace{|\,t_k{}^s|}_{\tau} = |\,\delta_l{}^s|\,,$$

ahol a τ és t rendre a $\tau_l{}^k$ és $t_k{}^s$ determinánsa. A fenti összefüggésből azonnal következik, hogy

$$\boxed{\tau\,t = 1\,.} \tag{4.20}$$

Szavakban: a τ és t egymás reciproka.

4.2.3. A kontravariáns bázisvektorok transzformációja. A (4.16b) képlet szerint

$$\mathbf{g}_l\cdot\mathbf{i}^k = \frac{\partial y^k}{\partial x^l} = \tau_l{}^k \qquad | \qquad \mathbf{g}_l\cdot{}'\mathbf{g}^k = \frac{\partial \xi^{\,m}}{\partial x^l} = \tau_l{}^{\,k}\,.$$

Mivel valamely $\mathbf{a}$ vektor a_l kovariáns koordinátája az $a_l = \mathbf{g}_l\cdot\mathbf{a}$ módon számítható a fenti képlet

$$\text{az } \mathbf{i}^k \text{ vektor} \qquad | \qquad \text{a } {}'\mathbf{g}^k \text{ vektor}$$

l-ik kovariáns koordinátája. Következésképp

$$\mathbf{i}^k = \frac{\partial y^k}{\partial x^l}\,\mathbf{g}^l = \tau_l{}^k\,\mathbf{g}^l \qquad | \qquad \boxed{{}'\mathbf{g}^k = \frac{\partial \xi^{\,m}}{\partial x^l}\,\mathbf{g}_l = \tau_l{}^{\,k}\,\mathbf{g}^l\,.} \tag{4.21}$$

Ha most átszorzunk $t_k{}^r$-el, illetve $t_k{}^r$-el és kihasználjuk a (4.15b) és (4.19a) összefüggéseket, akkor a

$$\frac{\partial x^r}{\partial y^k}\,\mathbf{i}^k = \underbrace{\frac{\partial x^r}{\partial y^k}\,\frac{\partial y^k}{\partial x^l}}_{\delta^r{}_l}\,\mathbf{g}^l \qquad | \qquad \frac{\partial x^r}{\partial x^k}\,{}'\mathbf{g}^k = \underbrace{\frac{\partial x^r}{\partial x^k}\,\frac{\partial x^k}{\partial x^l}}_{\delta^r{}_l}\,\mathbf{g}^l\,,$$

illetve a két oldal felcserélésével a

$$\mathbf{g}^r = \frac{\partial x^r}{\partial y^k}\,\mathbf{i}^k = t_k{}^r\mathbf{i}^k \qquad | \qquad \boxed{\mathbf{g}^r = \frac{\partial x^r}{\partial x^k}\,{}'\mathbf{g}^k = t_k{}^r\,{}'\mathbf{g}^k} \tag{4.22}$$

eredményt kapjuk.

A (4.16a), (4.22), (4.21) és a (4.15a) összefüggések felhasználásával táblázatba foglalhatók a bázisvektorok transzformációs képletei:

(4.23)

$\mathbf{g}_l = \dfrac{\partial y^m}{\partial x^l}\,\mathbf{i}_m = \tau_l{}^m\,\mathbf{i}_m$	$\mathbf{g}_l = \dfrac{\partial \xi'^m}{\partial x^l}\,{}'\mathbf{g}_m = \tau_l{}^m\,{}'\mathbf{g}_m$
$\mathbf{g}^r = \dfrac{\partial x^r}{\partial y^k}\,\mathbf{i}^k = t_k{}^r\,\mathbf{i}^k$	$\mathbf{g}^r = \dfrac{\partial x^r}{\partial \xi'^k}\,{}'\mathbf{g}^k = t_k{}^r\,{}'\mathbf{g}^k$
$\mathbf{i}_k = \dfrac{\partial x^s}{\partial y^k}\,\mathbf{g}_s = t_k{}^s\,\mathbf{g}_s$	${}'\mathbf{g}_k = \dfrac{\partial x^s}{\partial \xi'^k}\,\mathbf{g}_s = t_k{}^s\,\mathbf{g}_s$
$\mathbf{i}^l = \dfrac{\partial y^l}{\partial x^r}\,\mathbf{g}^r = \tau_r{}^l\,\mathbf{g}^r$	${}'\mathbf{g}^l = \dfrac{\partial \xi'^l}{\partial x^r}\,\mathbf{g}^r = \tau_r{}^l\,\mathbf{g}^r$

1. táblázat. Bázisvektorok transzformációja

4.2.4. Vektorok transzformációja. Az $\mathbf{a}$ vektor bármely lokális KR-ben megadható. A vektor

$$\mathbf{a} = a_r\,\mathbf{g}^r = {}'a_l\,{}'\mathbf{g}^l$$

előállításából, felhasználva az 1. táblázat képleteit az

$$a_s\,\mathbf{g}^s = a_s\,\frac{\partial x^s}{\partial \xi'^k}\,{}'\mathbf{g}^k = {}'a_k\,{}'\mathbf{g}^k \qquad | \qquad {}'a_m\,{}'\mathbf{g}^m = {}'a_m\,\frac{\partial \xi'^m}{\partial x^l}\,\mathbf{g}^l = a_l\mathbf{g}^l$$

illetve az

(4.24)
$$ {}'a_k = a_s\,\frac{\partial x^s}{\partial \xi'^k} \qquad | \qquad a_l = {}'a_m\,\frac{\partial \xi'^m}{\partial x^l}$$

összefüggések következnek. Ugyanígy kapjuk az $\mathbf{a}$ vektor

$$\mathbf{a} = a^l\,\mathbf{g}_l = {}'a^k\,{}'\mathbf{g}_k$$

előállításából, hogy

$$a^r\,\mathbf{g}_r = a^r\,\frac{\partial \xi'^l}{\partial x^r}\,{}'\mathbf{g}_l = {}'a^l\,{}'\mathbf{g}_l \qquad | \qquad {}'a^k\,{}'\mathbf{g}_k = {}'a^k\,\frac{\partial x^r}{\partial \xi'^k}\,\mathbf{g}_r = a^r\,\mathbf{g}_r$$

azaz, hogy

(4.25)
$$ {}'a^l = a^r\,\frac{\partial \xi'^l}{\partial x^r} \qquad | \qquad a^r = {}'a^k\,\frac{\partial x^r}{\partial \xi'^k}$$

A (4.24) és (4.25) képletek táblázatba foglalhatók:

(4.26)

$a_l = \dfrac{\partial y^m}{\partial x^l}\,{}'a_m = \tau_r{}^l\,{}'a_m$	$a_l = \dfrac{\partial \xi'^m}{\partial x^l}\,{}'a_m = \tau_l{}^m\,{}'a_m$
$a^r = \dfrac{\partial x^r}{\partial y^k}\,{}'a^k = t_k{}^r\,{}'a^k$	$a^r = \dfrac{\partial x^r}{\partial \xi'^k}\,{}'a^k = t_k{}^r\,{}'a^k$
${}'a_k = \dfrac{\partial x^s}{\partial y^k}\,a_s = t_k{}^s\,a_s$	${}'a_k = \dfrac{\partial x^s}{\partial \xi'^k}\,a_s = t_k{}^s\,a_s$
${}'a^l = \dfrac{\partial y^l}{\partial x^r}\,a^r = \tau_r{}^l\,a^r$	${}'a^l = \dfrac{\partial \xi'^l}{\partial x^r}\,a^r = \tau_r{}^l\,a^r$

2. táblázat. Vektorok transzformációja

Az (y) és (x) KR-ek közötti transzformáció táblázat baloldali oszlopában álló képleteit formális igazolás nélkül közöljük.

Megállapítható az 1. és 2. táblázatok egybevetése alapján, hogy

- az a_l, $'a_k$ és $'a_k$ kovariáns koordináták ugyanúgy transzformálódnak, mint a $\mathbf{g}_l$, $\mathbf{i}_k$ és $'\mathbf{g}_k$ kovariáns bázisvektorok;
- az a^r, $'a^l$ és $'a^l$ kontravariáns koordináták ugyanúgy transzformálódnak, mint a $\mathbf{g}^r$, $\mathbf{i}^l$ és $'\mathbf{g}^l$ kontravariáns bázisvektorok.

4.2.5. Másodrendű tenzorok transzformációja. Az $\boldsymbol{A}$ másodrendű tenzor bármely lokális KR-ben megadható. Az $\boldsymbol{A}$ tenzor (x) és (ξ) KR-ben vett

$$\boldsymbol{A} = a_{pq}\,\mathbf{g}^p \otimes \mathbf{g}^q = {}'a_{k\,l}\,\mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}^l\,, \qquad \boldsymbol{A} = a^p{}_q\,\mathbf{g}_p \otimes \mathbf{g}^q = {}'a^k{}_l\,\mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}_l\,,$$

alakjai között az 1. táblázat felhasználásával, azaz a bázisvektorok transzformációs képleteinek helyettesítésével teremthetünk kapcsolatot:

$$\boldsymbol{A} = a_{pq}\,\mathbf{g}^p \otimes \mathbf{g}^q = a_{pq}\,\frac{\partial x^p}{\partial \xi^k}\,\frac{\partial x^q}{\partial \xi^l}\,\mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}^l = t_k{}^p\,t_l{}^q\,a_{pq}\,\mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}^l = {}'a_{k\,l}\,\mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}^l \tag{4.27a}$$

$$\boldsymbol{A} = a^p{}_q\,\mathbf{g}_p \otimes \mathbf{g}^q = a^p{}_q\,\frac{\partial \xi^k}{\partial x^p}\,\frac{\partial x^q}{\partial \xi^l}\,\mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}^l = \tau^k{}_p\;t_l{}^q\,a^p{}_q\,\mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}^l = {}'a^k{}_l\,\mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}^l \tag{4.27b}$$

Hasonló gondolatmenettel található meg a fennmaradó hat transzformációs formula. A transzformáció összes képletét, beleértve azt a hatot is, amelyet fentebb formálisan nem igazoltunk, a 3. táblázatban foglaltuk össze:

(4.28)

$a_{pq} = \dfrac{\partial \xi^k}{\partial x^p}\,\dfrac{\partial \xi^l}{\partial x^q}\,'a_{kl} = \tau_p{}^k\tau_q{}^l\,'a_{kl}$	$'a_{kl} = \dfrac{\partial x^p}{\partial \xi^k}\,\dfrac{\partial x^q}{\partial \xi^l}\,a_{pq} = t_k{}^p t_l{}^q\,a_{pq}$
$a^{pq} = \dfrac{\partial x^p}{\partial \xi^k}\,\dfrac{\partial x^q}{\partial \xi^l}\,'a^{kl} = t_k{}^p t_l{}^q\,'a^{kl}$	$'a^{kl} = \dfrac{\partial \xi^k}{\partial x^p}\,\dfrac{\partial \xi^l}{\partial x^q}\,a^{pq} = \tau_p{}^k\tau_q{}^l\,a^{pq}$
$a^p{}_q = \dfrac{\partial x^p}{\partial \xi^k}\,\dfrac{\partial \xi^l}{\partial x^q}\,'a^k{}_l = t_k{}^p\tau_q{}^l\,'a^k{}_l$	$'a^k{}_l = \dfrac{\partial \xi^k}{\partial x^p}\,\dfrac{\partial x^q}{\partial \xi^l}\,a^p{}_q = \tau_p{}^k t_l{}^q\,a^p{}_q$
$a_p{}^q = \dfrac{\partial \xi^k}{\partial x^p}\,\dfrac{\partial x^q}{\partial \xi^l}\,'a_k{}^l = \tau_p{}^k t_l{}^q\,'a_k{}^l$	$'a_k{}^l = \dfrac{\partial x^p}{\partial \xi^k}\,\dfrac{\partial \xi^l}{\partial x^q}\,a_p{}^q = t_k{}^p\tau_q{}^l\,a_p{}^q$

3. táblázat. Másodrendű tenzor transzformációja az (ξ) és (x) KR-ek között

A táblázat baloldali oszlopa az (ξ) KR-ből az (x) KR-be, a jobboldali oszlop pedig az (x) KR-ből az (ξ)-be történő transzformáció képleteit tartalmazza.

Megállapítható az 1., 2. és 3. táblázatok egybevetése alapján, hogy a kovariáns, illetve kontravariáns indexek mindig ugyanúgy transzformálódnak mindkét irányban, függetlenül attól hogy bázsisvektorokról, vektorokról, avagy másodrendű tenzorok koordinátáiról van szó.

Maga a kovariáns jelző arra utal, hogy a kovariáns (alsóindexes) bázisvektorok azonosan transzformálódnak (együtt változnak).

Bár nem igazoltuk formálisan, és nem is írtuk ki a másodrendű tenzorok (y) karteziuszi és az (x) görbevonalú KR-ek közötti transzformációjának szabályait azok azonnal megkaphatók a 3. táblázatból, ha a kék indexek helyére zöld indexeket és az ξ helyére y-t gondolunk.

4.2.6. Tenzorok szorzatainak transzformációja. Tekintsük az

$$\boldsymbol{A} = a_{pq}\,\mathbf{g}^q \otimes \mathbf{g}^q\,, \qquad \boldsymbol{B} = b^r{}_s\,\mathbf{g}_r \otimes \mathbf{g}^s$$

másodrendű tenzorokat. A

$$\mathbb{C} = \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} = \underbrace{a_{pq} b^r{}_s}_{c_{pq}{}^r{}_s}\,\mathbf{g}^q \otimes \mathbf{g}^q \otimes \mathbf{g}_r \otimes \mathbf{g}^s \tag{4.29}$$

negyedrendű tenzor (tenzoriális szorzat) esetén nem nehéz meggyőződni arról, felhasználva az 1. táblázat képleteit, hogy

$$'c_{k\,l}{}^{m}{}_{n} = t_k{}^p\, t_l{}^q\, \tau_r{}^m\, t_n{}^s\, c_{pq}{}^r{}_s \tag{4.30}$$

az (x) KR-ből az (ξ) KR-be történő transzformáció képlete.

Az $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ tenzorok

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} &= a_{pq}\,\mathbf{g}^q \otimes \underbrace{\mathbf{g}^q\, b^r{}_s}_{\llcorner\,.\,\lrcorner}\,\mathbf{g}_r \otimes \mathbf{g}^s = \\ &= a_{pq}\, b^r{}_s \mathbf{g}^q \otimes \delta^q{}_r \mathbf{g}^s = a_{pq}\, b^q{}_s \mathbf{g}^q \otimes \mathbf{g}^s = d_{ps}\mathbf{g}^q \otimes \mathbf{g}^s \end{aligned} \tag{4.31}$$

skaláris szorzata másodrendű tenzor, amely követi a másodrendű tenzorok transzformációjával kapcsolatos 3. táblázatban részletezett szabályokat, azaz

$$'d_{k\,l} = t_k{}^p\, t_l{}^s\, d_{ps} = t_k{}^p\, t_l{}^s\, a_{pq}\, b^q{}_s\,. \tag{4.32}$$

A kapott eredmény szerint *a néma indexek nem transzformálódnak*, de megmutatható hogy

$$'d_{k\,l} = t_k{}^p\, t_l{}^s\, a_{pq}\, b^q{}_s = {}'a_{l\,q}\,{}'b^q{}_s \tag{4.33}$$

Az utóbbi képlet igazolását gyakorlatra hagyjuk.

Megjegyzések:

1. A (4.29) képlettel adott $\mathbb{C}$ két másodrendű tenzor diádikus szorzata (tenzoriális szorzata). Mivel a szorzatban megjelenő
$$\mathbf{g}^q \otimes \mathbf{g}^q \otimes \mathbf{g}_r \otimes \mathbf{g}^s$$
bázistenzor négy bázisvektor diádikus szorzata a szorzatot negyedrendű tenzornak nevezzük. Ez egyben azt jelenti, hogy a magasabbrendű tenzorok alacsonyabbrendű tenzorok tenzoriális szorzatának tekinthetők.
2. A (4.30) képlet két másodrendű tenzor skaláris szorzata. Skaláris szorzás, a (4.30) képlet megszabta módon, magasabbrendű tenzorok között is végezhető.

Gyakorlatok

1. Igazolja, hogy a $\delta^k_\ell\,\mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}^\ell$ és $g^{k\ell}\,\mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_\ell$ tenzorok minden vektort önmagára képeznek le.
2. Mutassa meg, hogy fennáll a (4.32) összefüggés, amely azt mondja ki, hogy két tenzor skaláris szorzatának transzformáltja megegyezik a transzformált tenzorok skaláris szorzatával.

5. FEJEZET

A tenzorfogalom általánosítása

5.1. Tenzorok értelmezése indexes jelölésmódban

5.1.1. Valódi tenzorok.

Valódi skalár. Akkor nevezzük a (ξ) és (x) görbevonalú KR-ekben egymástól függetlenül értelmezett $\Phi(x^1,x^2,x^3)$ és $\Phi(\xi^1,\xi^2,\xi^3)$ függvényeket *valódi skalárnak* (*zérusrendű, vagy nulladrendű tenzornak*) ha azonos az értékük a KR transzformáció során, azaz

$$\Phi(\xi^1,\xi^2,\xi^3)=\Phi\left[x^1(\xi^1,\xi^2,\xi^3),\ x^2(\xi^1,\xi^2,\xi^3),\ x^3(\xi^1,\xi^2,\xi^3)\right] \tag{5.1a}$$

avagy

$$\Phi(x^1,x^2,x^3)=\Phi\left[\xi^1(x^1,x^2,x^3),\ \xi^2(x^1,x^2,x^3),\ \xi^3(x^1,x^2,x^3)\,.\right] \tag{5.1b}$$

A valódi skalár a tér egy adott a skalár értelmezési tartományában fekvő pontjában KR-től függetlenül ugyanaz az érték.

Valódi vektor. Visszaidézve a 4.2.4. szakasz képleteit és a 2. táblázatot, és külön is kiemelve az értelmezés hátterét megvilágító képletek közül az

$$'a_{\,k}\,{}'\mathbf{g}^k=t_{\,k}^{\ s}\,a_s\,{}'\mathbf{g}^k=a_s\,\mathbf{g}^s$$

összefüggést azt mondjuk, hogy:

a (ξ), illetve az (x) görbevonalú KR-ekben egymástól függetlenül értelmezett

$$'a_{\,k},\ \ a_l \qquad \text{és} \qquad 'a^{\,l},\ \ a^r$$

háromelemű sokaságok (objektumok) *kovariáns, illetve kontravariáns vektorok* (*elsőrendű tenzorok*), ha fennállnak közöttük a vektorok transzformációjával kapcsolatos és a 2. táblázatban összegezett képletek, pl.:

$$'a_k=t_{\,k}^{\ s}\,a_s \qquad \text{és} \qquad 'a^l=a^r\,\tau_r^{\ l}$$

etc.

Valódi másodrendű tenzor. Visszaidézve a 4.2.5. szakasz képleteit és a 3. táblázatot, továbbá külön is kiemelve az értelmezés hátterét megvilágító képletek közül az

$$'a_{\,kl}\,{}'\mathbf{g}^k\otimes{}'\mathbf{g}^l=t_{\,k}^{\ p}\,t_{\,l}^{\ q}\,a_{pq}\,{}'\mathbf{g}^k\otimes{}'\mathbf{g}^l=a_{pq}\,\mathbf{g}^p\otimes\mathbf{g}^q$$

összefüggést azt mondjuk, hogy:

a (ξ), illetve az (x) görbevonalú KR-ekben egymástól függetlenül értelmezett

$$'a_{\,kl},\ a_{pq};\quad 'a^{\,kl},\ a^{pq};\quad 'a^{\,k}_{\ \,l},\ a^p_{\ \,q};\quad 'a_{\,k}^{\ \,l},\ a_p^{\ \,q}$$

kilencelemű sokaságok (objektumok) rendre *kovariáns, kontravariáns, kontravariáns kovariáns indexű, illetve kovariáns kontravariáns (vegyes) indexű másodrendű tenzorok*, ha fennállnak közöttük a másodrendű tenzorok transzformációjával kapcsolatos és a 3. táblázatban összefoglalt képletek, pl.:

$$'a_{\,kl}=t_{\,k}^{\ p}t_{\,l}^{\ q}\,a_{pq} \qquad \text{vagy} \qquad 'a^{\,k}_{\ \,l}=\tau_p^{\ k}t_{\,l}^{\ q}\,a^p_{\ \,q}$$

etc.

A valódi vektort egyszerűen csak vektornak, a valódi tenzort egyszerűen csak tenzornak szokás nevezni.

Megjegyzések:

1. A vektor mint elsőrendű tenzor értelmezésekor nem vetettük fel azt a kérdést mi a feltétele, hogy az
$$a^p,\ b_q$$
típusú sokaságok (hármasok) ugyanazt a vektort adják.
2. A másodrendű tenzor értelmezésekor nem vetettük fel azt a kérdést mi a feltétele, hogy a
$$a_{pq},\ b_p{}^q,\ b^p{}_q,\ d^{pq}$$
típusú sokaságok (kilencelemű objektumok) ugyanazt a másodrendű tenzort adják.

A fenti kérdések megválaszolását gyakorlatra hagyjuk.

Harmad és magasabbrendű tenzorok. Általánosítva a valódi vektor és valódi másodrendű tenzor értelmezését azt fogjuk mondani, hogy:

a (ξ), illetve az (x) görbevonalú KR-ekben egymástól függetlenül értelmezett
$$'d^k{}_{lm},\ \ d^p{}_{qr}$$
huszonhételemű sokaságok (objektumok) ugyanazon *egyszer kontravariáns kétszer kovariáns indexű harmadrendű tenzorok*, ha fennáll közöttük a

$$'d^k{}_{lm} = \tau_p{}^k\, t_l{}^q\, t_m{}^r\, d^p{}_{qr} \tag{5.2}$$

transzformációs összefüggés.

Továbbmenve azt fogjuk mondani, hogy valódi n-edrendű tenzorok a (ξ), illetve az (x) görbevonalú KR-ben egymástól függetlenül értelmezett

$$'b^{\overbrace{k\,l\,\ldots}^{n_1\ \text{index}}}{}_{\underbrace{p\,q\,r\,\ldots}_{n_2\ \text{index}}} \quad \text{és} \quad b^{\overbrace{sr\ldots}^{n_1\ \text{index}}}{}_{\underbrace{uvw\ldots}_{n_2\ \text{index}}}\ ; \qquad n_1+n_2=n$$

objektumok, ha fennáll közöttük a

$$'b^{k\,l\,\ldots}{}_{p\,q\,r\,\ldots} = \tau_s{}^k\, \tau_r{}^l \ldots t_p{}^u\, t_q{}^v\, t_r{}^w \ldots b^{sr\ldots}{}_{uvw\ldots} \tag{5.3}$$

összefüggés.

Másként és az indexpozíciótól független értelmezés érdekében tekintsünk két n indexű objektumot az (ξ) illetve az (x) görbevonalú KR-ben, melyekre balról jobbra számlálva az indexeket az azonos sorszámú indexek azonos (vagy mindkettő felső, vagy mindkettő alsó) indexpozícióban vannak. A két objektum ugyanaz a valódi n-edrendű tenzor, ha a felső indexek (kontravariáns indexek) a kontravariáns indexekkel kapcsolatos, az alsó indexek (kovariáns indexek) pedig a kovariáns indexekkel kapcsolatos transzformációnak megfelelően transzformálódnak.

5.1.2. Tenzorok-e a korábban megismert objektumok. Az alábbiakban azt a kérdést válaszoljuk meg, példaként véve a legtipikusabb eseteket, hogy tenzorok-e az előző szakasz értelmezéseit véve alapul az eddig megismert $\delta^k{}_l$, g_{rs}, g^{pq}, ε_{klm}, ε^{pqr}, e_{klm}, e^{pqr}, γ_o, γ^o, g_o, g^o objektumok.

A továbbiak a tipikus esetekre vonatkozóan vizsgálják a felvetett kérdést:

(a) Amint az kitűnik az 1. táblázat felhasználásával adódó

$$'\delta^p{}_q = {}'\mathbf{g}^p \cdot {}'\mathbf{g}_q = \tau_k{}^p\, t_p{}^l\, \mathbf{g}^k \cdot \mathbf{g}_l = \tau_k{}^p\, t_p{}^l\, \delta^k{}_l \tag{5.4}$$

összefüggésből a $\delta^k{}_l$ indexátnevező operátor (a Kronecker delta) másodrendű tenzorként transzformálódik. Ez azt jelenti, hogy $'\delta^p{}_q$ és $\delta^k{}_l$ ugyanaz a tenzor (valódi tenzor).

(b) Az (a) alatti gondolatmenet lépéseivel azt kapjuk, hogy

$$'g_{kl} = {}'\mathbf{g}_k \cdot {}'\mathbf{g}_l = \frac{\partial x^r}{\partial \xi'^k}\,\frac{\partial x^s}{\partial \xi'^l}\,\mathbf{g}_r \cdot \mathbf{g}_s = t_k{}^r\, t_l{}^s\, g_{rs}\,, \tag{5.5}$$

ami az jelenti, hogy $'g_{kl}$ és g_{rs} követi a másodrendű tenzorokkal kapcsolatos transzformáció szabályait. Következésképp mindkettő ugyanaz a tenzor (valódi tenzor).

(c) A (b) alatti lépésekkel kapjuk, hogy

$$'\varepsilon_{uvv} = [{}'\mathbf{g}_u\,{}'\mathbf{g}_v\,{}'\mathbf{g}_w] = \frac{\partial x^k}{\partial \xi'^u}\,\frac{\partial x^l}{\partial \xi'^v}\,\frac{\partial x^m}{\partial \xi'^w}\,[\mathbf{g}_k\,\mathbf{g}_l\,\mathbf{g}_m] = t_u{}^k\, t_v{}^l\, t_w{}^m\, \varepsilon_{klm} \tag{5.6}$$

azaz, hogy $'\varepsilon_{uvv}$ és ε_{klm} követi a harmadrendű tenzorokkal kapcsolatos transzformáció szabályait. Következésképp mindkettő ugyanaz a harmadrendű tenzor (valódi tenzor).

(d) Írjunk u, v és w helyére 1, 2 és 3-at az (5.6) képletben. Kapjuk, hogy

$$\varepsilon_{123} = {}'\gamma_o \underbrace{e_{123}}_{1} = \underbrace{t_1{}^k\, t_2{}^l\, t_3{}^m\, e_{klm}}_{|t_u{}^k| = t}\gamma_o\,,$$

avagy

$$'\gamma_o = t\,\gamma_o \tag{5.7a}$$

ahol t a $|t_u{}^k|$ determinánst jelöli. Az (5.7a) képlet szerint nem valódi skalár az a (ξ) és (x) görbevonalú KR-ekben ugyanúgy értelmezett

$$'\gamma_o = [{}'\mathbf{g}_1\,{}'\mathbf{g}_2\,{}'\mathbf{g}_3]\,, \qquad \gamma_o = [\mathbf{g}_1\mathbf{g}_2\mathbf{g}_3]$$

vegyesszorzat.

A későbbiek kedvéért az

$$\boxed{'\gamma_o = t^M\,\gamma_o; \qquad M = 1} \tag{5.7b}$$

alakba írjuk át az (5.7b) képletet.

(e) Alakítsuk át oly módon az (5.6) egyenletet, hogy kapcsolatot találjunk a (ξ) és (x) görbevonalú KR-ekben tekintett permutációs szimbólumok között. Az egyenlet baloldala az

$$'\varepsilon_{uvw} = {}'\gamma_o \boxed{'e_{uvw}}$$

a jobboldala pedig az

$$\varepsilon_{'u'v'w} = t_u{}^k\, t_v{}^l\, t_w{}^m\, e_{klm}\gamma_o = \underset{(5.7a)}{\Uparrow} = {}'\gamma_o \boxed{\frac{1}{t} t_u{}^k\, t_v{}^l\, t_w{}^m\, e_{klm}}$$

alakban írható fel. Egyenlőség csak akkor lehetséges, ha megegyeznek egymással a bekeretezett képletrészek. Következőleg fennáll az

$$\boxed{'e_{uvw} = t^M t_u{}^k\, t_v{}^l\, t_w{}^m\, e_{klm}\,, \qquad M = -1} \tag{5.8}$$

egyenlet.

Megjegyzések:

1. Mivel $M \neq 0$, a kovariáns permutációs szimbólum nem követi a harmadrendű tenzorokkal kapcsolatos transzformáció szabályait. Következőleg a kovariáns permutációs szimbólum nem valódi tenzor.

2. Az (5.7b) és (5.8) képletekkel adott eredmények a következő módon általánosíthatók. Azt mondjuk majd, hogy M súlyú tenzor a (ξ) és (x) görbevonalú KR-ekben értelmezett n-edrendű – visszautalunk itt jelölések tekintetében az (5.3) képletre és előzményeire –

$$'b^{kl\dots}{}_{pqr\dots} \qquad \text{és} \qquad b^{sr\dots}{}_{uvw\dots}$$

objektum, ha

$$'b^{kl\dots}{}_{pqr\dots} = t^M \tau_s{}^k \tau_r{}^l \dots t_p{}^u t_q{}^v t_r{}^w \dots b^{sr\dots}{}_{uvw\dots} \,. \tag{5.9}$$

Az $M = 0$ esetben valódi a tenzor. Az $M \neq 0$ esetben pszeudo-, vagy áltenzorról beszélünk .

5.2. Műveletek tenzorok között

5.2.1. Additív műveletek és jelölésbeli megállapodások. Az alábbi műveletek egy részéről már esett szó a 2.1.3. alszakaszban – v.ö. 18. o. Részbeni ismétlésüket a tenzorjelleggel kapcsolatos állítások megfogalmazása indokolja.

Az alábbiakban a tenzor típusán az indexkiosztás milyenségét értjük. Az $d^k{}_{nl}$ és $d^{pq}{}_s$ tenzorok harmadrendűek, de különböző típusúak, mivel az első egyszer kontravariáns, kétszer kovariáns a második pedig kétszer kontravariáns, egyszer kovariáns tenzor.

Egyszerű belátni, hogy *két ugyanolyan rendű és típusú valódi tenzor összegezhető és a súlyozott összeg is valódi tenzor.*

Következésképp fennállnak az alábbiak:

Két vektor súlyozott összege.
Az a_k és b_k valódi vektorok

$$c_k = \lambda a_k \pm \mu b_k$$

súlyozott összege (λ és μ a súlyok) valódi tenzor.

Két másodrendű tenzor súlyozott összege.
Az $a_p{}^q$ és $b_p{}^q$ valódi másodrendű és azonos típusú tenzorok

$$c_p{}^q = \lambda a_p{}^q \pm \mu b_p{}^q$$

súlyozott összege (λ és μ a súlyok) valódi másodrendű tenzor. (A típus azonossága feltétele a szabadindexek egyensúlyának.)

A harmad és magasabbrendű tenzorok összegei hasonló módon képezhetők. Példaként álljon itt az $a^k{}_{lr}$ és $b^k{}_{lr}$ valódi harmadrendű tenzorok $c^k{}_{lr}$ összege:

$$c^k{}_{lr} = \lambda a^k{}_{lr} \pm \mu b^k{}_{lr} \,.$$

Felhívjuk ismét a figyelmet arra a (2.5) egyenlet kapcsán megfogalmazott szabályra, hogy a szabad indexek az egyenlet jobb-, és baloldalán minden tagban azonos indexpozícióban kell, hogy legyenek. Ez a követelmény a fenti egyenletek esetén láthatóan teljesül.

Az alábbiak néhány eddig hallgatólagosan alkalmazott és néhány további *jelölésbeli megállapodást* összegezésszerűen tekintenek át.

A *vektort* szimbolikus írásmódban álló félkövér kis és nagybetű egyaránt jelölheti. Indexes jelölésmódban a vektor koordinátáit ugyanez de kurzívan és indexszel szedett kis illetve nagybetű betű jelöli. Az index lehet alsó, vagy felső.

Szimbolikus írásmódban dőlt félkövér kis és nagybetű egyaránt jelölheti a *másodrendű tenzort*. Indexes jelölésmódban a másodrendű tenzor koordinátáit ugyanez de kurzívan és indexekkel szedett kis illetve nagybetű jelöli. Az indexek lehetnek alsók, vagy felsők.

Szimbolikus írásmód esetén félkövér kaligrafikus nagybetű jelöli a *harmadrendű tenzort*. Ezzel a megállapodással összhangban

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \varepsilon_{klm}\, \mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}^l \otimes \mathbf{g}^m = \varepsilon^{pqr}\, \mathbf{g}_p \otimes \mathbf{g}_q \otimes \mathbf{g}_r \tag{5.10}$$

az epszilon tenzor.

Negyedrendű tenzorok szimbolikus szedése esetén, amint azt már láttuk a (4.29) egyenlet kapcsán, kettősen írt nagybetű a szimbolikus jelölés. Ezzel összhangban negyedrendű a

$$\mathbb{D} = d_{kl}{}^{pq}\, \mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}^l \otimes \mathbf{g}_p \otimes \mathbf{g}_q \tag{5.11}$$

tenzor.

Indexes jelölésmódban a szimbolikus jelölésmód kurzív kis-, vagy nagybetűje jelöli a *harmad-, illetve magasabbrendű tenzort* az indexek kiírásával.

Megjegyezzük, hogy a bázistenzor kiírása esetén az indexpozíciók és a csatlakozó bázisvektorok összhangban kell, hogy legyenek.

5.2.2. Skaláris és diádikus szorzatok.

Két valódi vektor skalárszorzata.
Legyen a_k, a^l és b_p, b^q valódi vektor. Ekkor a vektorok

$$c = a_k\, b^k = a^p\, b_p = a_k\, g^{kp}\, b_p = a^l\, g_{lq}\, c^q$$

skalárszorzata valódi skalár. A szorzat szimbolikus írásmódját illetően visszautalunk a (2.13) képletre.

Másodrendű tenzor és vektor skalárszorzata.
Legyen a $d_k{}^m$, d_{sk}, $d^l{}_s$, d^{ml} valódi másodrendű tenzor. Legyen továbbá c_m, c^s valódi vektor. Nem nehéz belátni, hogy valódi vektor a $\boldsymbol{D}$ tenzor és a $\mathbf{c}$ vektor jobbról vett

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{D}\cdot\mathbf{c} \quad \Big| \quad \begin{aligned} a_k &= d_k{}^m\, c_m = d_{ks} c^s \\ a^l &= d^l{}_s c_m = d^l{}_s\, c^s\,, \end{aligned} \tag{5.12a}$$

illetve balról vett

$$\mathbf{b} = \mathbf{c}\cdot\boldsymbol{D} \quad \Big| \quad \begin{aligned} b_k &= c_m\, d^m{}_k = c^s\, d_{sk} \\ b^l &= c_m\, d^{ml} = c^s\, d_s{}^l \end{aligned} \tag{5.12b}$$

skalárszorzata. Nyilvánvaló, hogy általában

$$\mathbf{a} \neq \mathbf{b} \quad \Big| \quad a_k \neq b_k\,. \tag{5.13}$$

A teljesség kedvéért a képletek baloldali oszlopa szemlélteti a szorzatok szimbolikus írásmódját. Ezt a megállapodást, az áttekinthetőség kedvéért a továbbiakban is alkalmazzuk.

Két másodrendű tenzor skalárszorzata.
Tegyük fel, hogy valódiak az $a_k{}^s$, a_{ks}, $a^k{}_m$, a^{km} és $b_k{}^m$, b_{sl}, $b^s{}_l$, b^{ml} másodrendű tenzorok. Ekkor valódi másodrendű tenzor a két tenzor

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C} \quad \Big| \quad \begin{aligned} c^k{}_l &= a^k{}_m\, b^m{}_l = a^{km}\, b_{ml} \\ c^{kl} &= a_{ks}\, b^s{}_l = a_k{}^s\, b_{sl} \end{aligned} \tag{5.14}$$

skaláris szorzata.

Megjegyzések:

1. A c_{kl} és $c_k{}^l$ alakok számítását nem tartalmazza az (5.14) képlet. Az indexes jelölésmód szabálya ennek ellenére kiolvasható az (5.14) képletből: (a) az első szorzótényező utolsó indexe és a második szorzótényező első indexe különböző indexpozícióban kell, hogy legyen; (b) a két index néma indexpárt kell hogy alkosson.
2. Nyilvánvaló, hogy általában

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C} \neq \boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A}\,. \tag{5.15}$$

Kettős (kétszeres) skaláris szorzat.
Az alábbiak a kettős skaláris szorzat értelmezését adják kellő általánossággal a negyedrendű $\mathbb{C}$ és $\mathbb{D}$ tenzorok segítségével szimbolikus írásmódban:

$$\text{(5.16)}\quad \mathbb{C}\cdot\cdot\,\mathbb{D} = c_m{}^n{}_{rs}\,\mathbf{g}^m\otimes\mathbf{g}_n\otimes\underbrace{\mathbf{g}^r\otimes\overbrace{\mathbf{g}^s\,d^{pq}{}_{vw}\,\mathbf{g}_p}^{\cdot}\otimes\mathbf{g}_q}_{\cdot}\otimes\mathbf{g}^v\otimes\mathbf{g}^w\;=$$

$$= c_m{}^n{}_{rs}\,\mathbf{g}^m\otimes\mathbf{g}_n\otimes\delta^r{}_p\delta^s{}_q d^{pq}{}_{vw}\,\mathbf{g}^v\otimes\mathbf{g}^w\;= c_m{}^n{}_{rs}\,d^{rs}{}_{vw}\,\mathbf{g}^m\otimes\mathbf{g}_n\otimes\mathbf{g}^v\otimes\mathbf{g}^w\,.$$

Indexes jelölésmódban

$$c_m{}^n{}_{rs}\,d^{rs}{}_{vw} = c_m{}^n{}_r{}^s\,d^r{}_{svw} = c_m{}^{nr}{}_s\,d_r{}^s{}_{vw} = c_m{}^{nrs}\,d_{rsvw}$$

a kettős skaláris szorzat értéke.
Megjegyzések:

1. Szimbolikus írásmódban a szorzótényezők közé helyezett két egymást követő pont a kettős skaláris szorzat műveleti jele.
2. Az értelmezés szerint az első szorzótényező [utolsó előtti] {utolsó} bázisvektorát a második szorzótényező [első] {második} bázisvektorával kell skalárisan összeszorozni. A megmaradó bázisvektorok együttese változatlan sorrendű diádként alkotja a bázistenzort.
3. Az eredmény mint tenzor rendszáma néggyel kisebb, mint a két tenzor rendszámának összege.
4. Indexes jelölésmódban az első szorzótényező [utolsó előtti] {utolsó} indexe néma indexpárt kell, hogy alkosson a második szorzótényező [első] {második} indexével.
5. Valódi tenzorok kétszeres skaláris szorzata ugyancsak valódi tenzor.
6. Két valódi másodrendű tenzor kettős skaláris szorzata valódi skalárt eredményez. E szorzat felét energia típusú szorzatnak is szokás nevezni.

Két tenzor általános (diádikus) szorzata.
Az $\boldsymbol{A}$ és $\boldsymbol{B}$ másodrendű tenzorokra nézve a

$$\text{(5.17)}\quad \mathbb{C} = \boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B} = \qquad | \qquad c^k{}_{lpq} = a^k{}_l\,b_{pq}$$
$$= a^k{}_l\,b_{pq}\,\mathbf{g}_k\otimes\mathbf{g}^l\otimes\mathbf{g}^p\otimes\mathbf{g}^q$$

egyenlet adja az általános vagy diádikus szorzatot.
Megjegyzések:

1. Két tenzor általános vagy diádikus szorzata olyan tenzor, melynek rendszáma a két tenzor rendszámának összege.
2. Indexes jelölésmódban úgy kapjuk meg a szorzatot, hogy egyszerűen egymás mellé írjuk a két tenzort.
3. Két valódi tenzor általános szorzata ugyancsak valódi tenzor.

A kontrakció.
A kontrakció szimbolikus írásmódban a bázistenzor két különböző bázisvektora között végzett skaláris szorzás. Indexes jelölésben (a) indexek egybeejtése, ha különböző indexpozícióban lévő két indexekről van szó; (b) azonos indexpozíciójú indexek esetén pedig le kell süllyeszteni (ha mindkét index felső), vagy fel kell emelni (ha mindkét index alsó) a tekintett két index egyikét az indexegybeejtés előtt. A $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ harmadrendű tenzor esetén

$$\text{(5.18a)}\quad d^{kl}{}_m\,\mathbf{g}_k\otimes\underbrace{\mathbf{g}_l\otimes\mathbf{g}^m}_{\cdot} = d^{km}{}_m\,\mathbf{g}_k = \mathbf{a} \qquad | \qquad d^{km}{}_m = a^k$$

az utolsó előtti és az utolsó bázisvektorok közötti kontrakció. Az első két bázisvektor tekintetében pedig ugyanilyen módon a

$$(5.18b)\quad d^{kl}{}_{m}\,\underset{\llcorner\,.\,\lrcorner}{\mathbf{g}_k\otimes\mathbf{g}_l}\otimes\mathbf{g}^m = d^{\,kl}{}_{m}\,g_{kl}\,\mathbf{g}^m = \quad\Big|\quad d^{\,kl}{}_{m}\,g_{kl} = d^{\,k}{}_{km} = b_{\,m}$$
$$= d^{\,k}{}_{km}\,\mathbf{g}^m = \mathbf{b}$$

eredményt kapjuk.

Megjegyzések:

1. A kontrakció kettővel csökkenti a tenzor rendjét.
2. Valódi tenzor esetén a kontrahált tenzor is valódi tenzor.
3. A kontrakció fogalmának felhasználásával azt lehet mondani, hogy a kettős skaláris szorzat a két tenzor általános szorzatában az első tenzor [utolsó előtti] {utolsó} indexe és a második tenzor [első] {második} indexe közötti kontrakció:

$$(5.19)\qquad c_{\,m}{}^{n}{}_{\boxed{rs}}\,d^{\boxed{pq}}{}_{vw} \qquad\Longrightarrow\qquad c_{\,m}{}^{n}{}_{rs}\,d^{\,rs}{}_{vw}\,.$$

5.3. Fizikai koordináták

5.3.1. Vektorok fizikai koordinátái. Fizikai koordinátákon vektorok esetén egységvektorok alkotta bázisra vonatkozó koordinátákat értünk. A fogalom bevezetését az indokolja, hogy a bázisvektorok, következőleg a tenzorok skalárkoordinátái általában különböző dimenziójúak és a maguk a bázisvektorok többnyire nem egységvektorok.

Ki fogjuk használni a továbbiakban azt a megállapodást, hogy a nagybetűs index rögzítettnek tekintett. Ezzel összhangban

g_{KK} a metrikus tenzor g_{11}, g_{22}, g_{33} skalárkoordinátáinak egyike,

és ugyanígy

g^{LL} a metrikus tenzor g^{11}, g^{22}, g^{33} skalárkoordinátáinak egyike.

Figyelembe véve, hogy az

$$(5.20)\qquad \mathbf{e}_K = \frac{\mathbf{g}_K}{\sqrt{g_{KK}}} \qquad\text{és}\qquad \mathbf{e}^L = \frac{\mathbf{g}^L}{\sqrt{g^{LL}}}$$

vektorok egyaránt egységvektorok az $\mathbf{a}$ vektor tekintetében írhatjuk, hogy

$$(5.21a)\qquad a^k\,\mathbf{g}_k = \sum_{K=1}^{3}\underbrace{\sqrt{g_{KK}}a^K}_{a^{<K>}}\mathbf{e}_K = a^{<k>}\,\mathbf{e}_k$$

és

$$(5.21b)\qquad a_{\,l}\,\mathbf{g}^{\,l} = \sum_{L=1}^{3}\underbrace{\sqrt{g^{LL}}a_L}_{a_{<L>}}\mathbf{e}^L = a_{<l>}\,\mathbf{e}^{\,l}\,,$$

ahol

$$(5.22)\qquad \boxed{a^{<K>} = \sqrt{g_{KK}}a^K \qquad\text{és}\qquad a_{<L>} = \sqrt{g^{LL}}a_L}$$

a keresett fizikai koordináták.

5.3.2. Másodrendű tenzorok fizikai koordinátái. Az $a^k{}_l$ másodrendű tenzor esetén abból indulunk ki, hogy a b^l vektor c^k képét kapjuk meg akkor is, ha a tenzor és a vektorok fizikai koordinátáival írjuk fel a vonatkozó leképezést. A vonatkozó

$$c^k = a^k{}_l\, b^l$$

egyenlet alapján, fizikai koordinátákra térve át a c^k és b^l esetén, azt kapjuk, hogy

$$c^{<K>} = \sum_{L=1}^{3} \underbrace{a^K{}_L \frac{\sqrt{g_{KK}}}{\sqrt{g_{LL}}}}_{a^{<K>}{}_{<L>}} b^{<L>} ,$$

ahonnan a tenzor jobboldali fizikai koordinátáit értelmező

$$\boxed{a^{<K>}{}_{<L>} = a^K{}_L \sqrt{\frac{g_{KK}}{g_{LL}}}} \tag{5.23a}$$

jelöléssel

$$c^{<k>} = a^{<k>}{}_{<l>}\, b^{<l>} . \tag{5.23b}$$

Hasonló okoskodással kapjuk a tenzor baloldali fizikai koordinátáit , ha a

$$d^q = b^p\, a_p{}^q$$

leképezést alakítjuk át a d^q és b^p vektorok fizikai koordinátáinak helyettesítésével:

$$d^{<Q>} = \sum_{P=1}^{3} b^{<P>} \underbrace{a_P{}^Q \frac{\sqrt{g_{QQ}}}{\sqrt{g_{PP}}}}_{a_{<P>}{}^{<Q>}},$$

Itt

$$\boxed{a_{<P>}{}^{<Q>} = a_P{}^Q \sqrt{\frac{g_{QQ}}{g_{PP}}}} \tag{5.24a}$$

a tenzor baloldali fizikai koordinátáit adja, amivel

$$d^{<q>} = b^{<p>}\, a_{<p>}{}^{<q>} \tag{5.24b}$$

Az a_{kl} és a^{pq} alakokhoz tartozó bal és jobboldali fizikai koordináták meghatározását gyakorlatra hagyjuk.

Gyakorlatok

1. Vizsgálja meg, milyen feltételek teljesülése mellett ugyanaz a vektor az
$$a^p \text{ és } b_q$$
sokaság (hármas) az (x) görbevonalú KR-ben.
2. Vizsgálja meg, milyen feltételek teljesülése mellett ugyanaz a tenzor az
$$a_{pq},\ b_p{}^q,\ c^p{}_q \text{ és a } d^{pq}$$
sokaság (kilencelemű objektum) az (x) görbevonalú KR-ben.
3. Mutassa meg, hogy valódi tenzor a g^{pq} metrikus tenzor.
4. Igazolja, hogy valódi tenzor a kontravariáns ε^{pqr} tenzor.
5. Mutassa meg, hogy nem valódi skalár a $\gamma^o = [\mathbf{g}^1\, \mathbf{g}^2\, \mathbf{g}^3]$ vegyesszorzat.
6. Igazolja, hogy pszeudotenzor a felsőindexes permutációs szimbólum.
7. Mutassa meg, hogy nem valódi skalárok a metrikus tenzorok a $g_o = |g_{kl}|$, $g^o = |g^{pq}|$ determinánsai.

8. Igazolja, hogy valódi skalár két valódi vektor skaláris szorzata.
9. Mutassa meg hogy valódi tenzor két ugyanolyan rendű és azonos típusú valódi tenzor súlyozott összege.
10. Mutassa meg hogy valódi tenzor két valódi tenzor [skaláris]{tenzoriális} szorzata.
11. Igazolja, hogy az a_{kl} tenzorhoz az
$$a_{<KL>} = a_{KL}\sqrt{\frac{g^{KK}}{g_{LL}}}$$
jobboldali fizikai koordináták tartoznak. Határozza meg a tenzor baloldali fizikai koordinátáit is.
12. Vezesse le az a^{pq} tenzor jobb-, és baloldali fizikai koordinátáit megadó képleteket.

6. FEJEZET

Másodrendű tenzorok

6.1. Másodrendű tenzorok egyes kérdései

6.1.1. A tenzor transzponáltja. Legyen $\boldsymbol{A}$ másodrendű tenzor. Legyenek továbbá tetszőlegesek a $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ vektorok. Azt fogjuk mondani, hogy az $\boldsymbol{A}^T$ tenzor az $\boldsymbol{A}$ tenzor transzponáltja, ha bármely $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$-re fennáll a

$$\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{w}=\mathbf{w}\cdot\boldsymbol{A}^T\cdot\mathbf{v} \tag{6.1}$$

egyenlet.

Az $\boldsymbol{A}$ másodrendű tenzor

$$a_{kl}\,\mathbf{g}^k\otimes\mathbf{g}^l\,,\qquad a^k{}_l\,\mathbf{g}_k\otimes\mathbf{g}^l\,,\qquad a_k{}^l\,\mathbf{g}^k\otimes\mathbf{g}_l\,,\qquad a^{kl}\,\mathbf{g}_k\otimes\mathbf{g}_l \tag{6.2a}$$

alakjaihoz tartozó transzponáltakat rendre

$$\left(a^T\right)_{kl}\mathbf{g}^k\otimes\mathbf{g}^l\,,\qquad \left(a^T\right)^k{}_l\,\mathbf{g}_k\otimes\mathbf{g}^l\,,\qquad \left(a^T\right)_k{}^l\,\mathbf{g}^k\otimes\mathbf{g}_l\,,\qquad \left(a^T\right)^{kl}\mathbf{g}_k\otimes\mathbf{g}_l \tag{6.2b}$$

jelöli.

Az alábbiakban, kapcsolatot keresünk az $\boldsymbol{A}$ és $\boldsymbol{A}^T$ között. A transzponáltat értelmező (6.1) egyenletből következő

$$\mathbf{w}\cdot\boldsymbol{A}^T\cdot\mathbf{v}-\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{w}=0 \tag{6.3}$$

különbség részletezése során a (6.2a,b)$_2$ alatti alakokat használjuk fel. Ekkor a kivonandó átalakítható a

$$v_p\,\mathbf{g}^p\cdot\underbrace{\left(a^k{}_l\,\mathbf{g}_k\otimes\mathbf{g}^l\right)}_{\boldsymbol{A}}\cdot w^q\,\mathbf{g}_q=v_p\,a^p{}_q\,w^q=\underline{w^p\,a^q{}_p\,v_q}=w^p\,\underbrace{\delta_p{}^l}_{\mathbf{g}_p\cdot\mathbf{g}^l}\,a^k{}_l\,\underbrace{\delta_k{}^q}_{\mathbf{g}_k\cdot\mathbf{g}^q}\,v_q=$$

$$=\boxed{w_p\,\mathbf{g}^p\cdot\left(a^k{}_l\,\mathbf{g}^l\otimes\mathbf{g}_k\right)\cdot v^q\,\mathbf{g}_q}$$

módon. A kisebbítendő tekintetében pedig a

$$\boxed{w_p\,\mathbf{g}^p\cdot\underbrace{\left(\left(a^T\right)^k{}_l\,\mathbf{g}_k\otimes\mathbf{g}^l\right)}_{\boldsymbol{A}^T}\cdot v^q\,\mathbf{g}_q}=\underline{w_p\,\left(a^T\right)^p{}_q\,v^q}$$

összefüggés áll fenn. Mivel a különbség zérus teljesülnie kell egyrészről a keretezett képletrészek alapján írható

$$\mathbf{w}\cdot\left[\boldsymbol{A}^T-a^k{}_l\,\mathbf{g}^l\otimes\mathbf{g}_k\right]\cdot\mathbf{v}=0\,, \tag{6.4a}$$

másrészről pedig az aláhúzott képletrészek alapján írható

$$w_p\,\left(a^T\right)^p{}_q\,v^q-w^p\,a^q{}_p\,v_q=0 \tag{6.4b}$$

egyenletnek. A (6.4a) egyenlet csak akkor állhat fenn tetszőleges $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ esetén, ha

$$\boldsymbol{A}^T=a^k{}_l\,\mathbf{g}^l\otimes\mathbf{g}_k\,. \tag{6.5a}$$

Visszaidézve, hogy az $\boldsymbol{A}$ tenzor (6.2a) alatti előállításához (vagy ami ugyanez az első kapcsos zárójellel megjelölt képletrészhez) képest fordított a bázisvektorok sorrendje a (6.5a)

jobboldalán (a bázistenzort alkotó diádban) azt a szabályt olvashatjuk ki a (6.5a) képletből, hogy a másodrendű tenzor transzponáltja a bázistenzort alkotó diádban a bázisvektorok szorzási sorrendjének felcserélésével kapható meg. Tömören: *a transzponálás művelete a bázistenzort alkotó diádok szorzási sorrendjének cseréje.* Az utóbbi mondatban arra utal a többesszám, hogy a fenti eredmény érvényes az $\boldsymbol{A}$ tenzor $(6.2a)_{1,3,4}$ alatti alakjaira is:

$$\boldsymbol{A}^T = a_{kl}\,\mathbf{g}^l\otimes\mathbf{g}^k = a_k{}^l\,\mathbf{g}_l\otimes\mathbf{g}^k = a^{kl}\,\mathbf{g}_l\otimes\mathbf{g}_k\,. \tag{6.5b}$$

Ennek igazolása a (6.4a)-ra vezető gondolatmenet szinte szószerinti ismétlésével történhet. Az igazolást gyakorlatra hagyjuk.

Visszatérve a (6.4b) alatti képlethez a kivonandóban végzett indexemelések (süllyesztések) után kiemelhető a $w_p\ v^q$ szorzat:

$$w_p\ v^q\ \left[\left(a^T\right)^p{}_q - a_q{}^p\right] = 0\,.$$

Tetszőleges w_p és v^q esetén csak akkor állhat fenn az utóbbi egyenlet, ha

$$\left(a^T\right)^p{}_q = a_q{}^p = g_{qk}a^k{}_l g^{lp}\,. \tag{6.6a}$$

Ez az eredmény azt jelenti, hogy úgy kapható meg az indexes jelölésmódban (a bázisvektorok elhagyásával) írt $a^p{}_q$ tenzor $\left(a^T\right)^p{}_q$ transzponáltja az eredeti $a^p{}_q$ tenzorból, hogy pozícióik meghagyása mellett felcseréljük az indexek sorrendjét. Ez az eredmény a másik három, vagyis az a_{kl}, $a_k{}^l$ és a^{kl} alakra is érvényes:

$$\left(a^T\right)_{kl} = a_{lk}\,, \qquad \left(a^T\right)_k{}^l = a^l{}_k\,, \qquad \left(a^T\right)^{kl} = a^{lk}\,. \tag{6.6b}$$

Az igazolást ismét gyakorlatra hagyjuk. Megjegyzések:

1. Mivel másodrendű tenzor esetén az első index sort, a második oszlopot számlál a tenzor mátrixában kiolvasható a (6.6a,b) képletekből, hogy a tenzor transzponáltjának mátrixa a tenzor mátrixának transzponáltja.
2. A transzponálás művelete bázisvektorok sorrendcseréje a bázistenzorban. Következésképp

$$\left(\boldsymbol{A}^T\right)^T = \boldsymbol{A} \tag{6.7}$$

Fennáll, hogy a tenzor transzponáltjának determinánsa megegyezik a tenzor determinánsával.

Tekintsük az $\boldsymbol{A}$ és $\boldsymbol{B}$ másodrendű tenzorok

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} \qquad | \qquad c^k{}_l = a^k{}_m\,b^m{}_l \tag{6.8}$$

szorzatát. A (6.6a) alapján írható

$$\left(c^T\right)^k{}_l = c_l{}^k = a_l{}^m\,b_m{}^k = \left(b^T\right)^k{}_m\left(a^T\right)^m{}_l$$

képlet szerint, ha

$$\boxed{\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\,, \qquad \text{akkor} \qquad \boldsymbol{C}^T = \boldsymbol{B}^T\cdot\boldsymbol{A}^T\,.} \tag{6.9}$$

6.1.2. Szimmetrikus és ferdeszimmetrikus tenzorok. Felbontási tétel. Azt fogjuk mondani, hogy [szimmetrikus] {ferdeszimmetrikus} az $\boldsymbol{A}$ tenzor, ha bármely $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$-re fennáll a

$$\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{w} = \pm\mathbf{w}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{v} \tag{6.10}$$

egyenlet, ahol a [szimmetrikus] {ferdeszimmetrikus} esetben [pozitív] {negatív} a jobboldal. Mivel bármely $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$-re fennáll a tenzor transzponáltját értelmező (6.1) egyenlet a (6.10) és (6.1) különbségéből az következik, hogy a [szimmetrikus] {ferdeszimmetrikus} $\boldsymbol{A}$ tenzor eleget tesz a

$$\mathbf{w}\cdot\left(\pm\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^T\right)\cdot\mathbf{v} = 0 \tag{6.11}$$

feltételnek. Innen a $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ vektorok tetszőlegessége miatt az következik, hogy akkor *szimmetrikus az $\boldsymbol{A}$ tenzor, ha megegyezik a transzponáltjával*:

$$\boxed{\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T\,.} \tag{6.12}$$

Mivel a szimmetrikus $\boldsymbol{A}$ tenzor, megegyezik a transzponáltjával a (6.6a,b) alapján írható, hogy

$$\left(a^T\right)^p{}_q = a_q{}^p = a^p{}_q\,, \qquad \left(a^T\right)_{kl} = a_{lk} = a_{kl}\,, \tag{6.13a}$$

$$\left(a^T\right)_k{}^l = a^l{}_k = a_k{}^l\,, \qquad \left(a^T\right)^{kl} = a^{lk} = a^{kl}\,. \tag{6.13b}$$

Ferdeszimmetrikus tenzor esetén a (6.11) egyenlet tetszőleges $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$-re történő fennállásából az következik, hogy *az $\boldsymbol{A}$ tenzor ellentettje a transzponáltjának*:

$$\boxed{\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}^T\,.} \tag{6.14}$$

Könnyű meggyőződni róla, hogy ez esetben a (6.13a,b) képletek helyére az

$$\left(a^T\right)^p{}_q = a_q{}^p = -a^p{}_q\,, \qquad \left(a^T\right)_{kl} = a_{lk} = -a_{kl}\,, \tag{6.15a}$$

$$\left(a^T\right)_k{}^l = a^l{}_k = -a_k{}^l\,, \qquad \left(a^T\right)^{kl} = a^{lk} = -a^{kl} \tag{6.15b}$$

összefüggések lépnek. Azonnal következik a (6.15a,b) képletekből, hogy a ferdeszimmetrikus $\boldsymbol{A}$ tenzor esetén

$$a_K{}^K = a_{KK} = a^K{}_K = a^{KK} = 0\,. \tag{6.16}$$

Általánosítások és megjegyzések:

1. Azt fogjuk mondani, hogy egy tenzor valamely két indexére nézve [szimmetrikus] {ferdeszimmetrikus (antiszimmetrikus)}, ha a tekintett két index sorrendcseréje esetén (eközben az indexek megőrzik pozíciójukat) a tenzor [nem változik meg] {előjelet vált}. Ha pl.

$$d_{klm} = d_{kml}\,, \qquad \text{vagy} \qquad f_r{}^{st} = f^s{}_r{}^t$$

   akkor [a $\boldsymbol{\mathcal{D}}$] {az $\boldsymbol{\mathcal{F}}$} tenzor szimmetrikus [a 2. és 3. jelű] {az 1. és 2. jelű} indexek alkotta indexpárjára nézve.
2. Az $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ permutációs tenzor ferdeszimmetrikus bármely indexpárjára nézve. Szokás ezen tulajdonsága miatt abszolút ferdeszimmetrikus tenzornak nevezni.
3. Az $\boldsymbol{A}$ tenzor értelmezés szerint

$$\left.\begin{array}{l}\text{pozitív definit}\\ \text{pozitív szemidefinit}\\ \text{negatív szemidefinit}\\ \text{negatív definit}\end{array}\right\} \text{ ha bármely } \mathbf{w};\,|\mathbf{w}|>0 \text{ esetén } \left\{\begin{array}{l}\mathbf{w}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{w} > 0\\ \mathbf{w}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{w} \geq 0\\ \mathbf{w}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{w} \leq 0\\ \mathbf{w}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{w} < 0\end{array}\right. .$$

Legyen a $\boldsymbol{D}$ valamilyen másodrendű tenzor. Az

$$\boxed{\boldsymbol{D}_{\text{sz}} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{D} + \boldsymbol{D}^T\right)} \tag{6.17}$$

egyenlettel értelmezett másodrendű tenzor szimmetrikus, hiszen $\boldsymbol{D}_{\text{sz}} = \boldsymbol{D}_{\text{sz}}^T$. [Vegyük figyelembe az ellenőrzés során, hogy $\left(\boldsymbol{D}^T\right)^T = \boldsymbol{D}$]. Ugyanígy kapjuk, hogy a

$$\boxed{\boldsymbol{D}_{\text{asz}} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{D}^T\right)} \tag{6.18}$$

egyenlettel értelmezett másodrendű tenzor pedig ferdeszimmetrikus[1] mivel $\boldsymbol{D}_{\text{asz}} = -\boldsymbol{D}_{\text{asz}}^T$.

A (6.17) és (6.18) egyenletek folyománya az ún. felbontási tétel:

$$\boxed{\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}_{\text{sz}} + \boldsymbol{D}_{asz}\ .} \tag{6.19}$$

Eszerint az egyenlet szerint bármilyen másodrendű tenzor felbontható egy szimmetrikus és ferdeszimmetrikus tenzor összegére. A $\boldsymbol{D}$ tenzor kovariáns alakjára fordítva a figyelmet

$$d_{(lm)} = \frac{1}{2}\,(d_{lm} + d_{ml}) \tag{6.20}$$

a tenzor szimmetrikus és

$$d_{[lm]} = \frac{1}{2}\,(d_{lm} - d_{ml}) \tag{6.21}$$

a tenzor ferdeszimmetrikus része. A fenti képletek jelölésbeli megállapodást is kifejeznek: a [szimmetrikus] {ferdeszimmetrikus} részt [kerek] {szögletes} zárójelben álló indexpár jelöli.

Megjegyzések:

1. A (6.20) egyenlet következménye, hogy szimmetrikus tenzor kovariáns alakjának mátrixa is szimmetrikus. Ugyanígy ellenőrizhető, hogy a szimmetrikus tenzor kontravariáns alakjának mátrixa is szimmetrikus.
2. Szimmetrikus tenzor kovariáns kontravariáns, illetve kontravariáns kovariáns alakjának általában nem szimmetrikus a mátrixa. Kivételként említhetők az egységtenzor $\delta_l{}^q$ és $\delta^q{}_l$ alakjai, melyeknek szimmetrikus és azonos a mátrixuk. Emiatt ezek írásánál, amint erre már a Kronecker delta értelmezése kapcsán rámutattunk, közömbös az indexsorrend.

6.1.3. A vektorinvariáns. A (6.21) egyenlet más, a vektorinvariáns értelmezését megkönnyítő alakra hozható az (1.29) képlet értelemszerű figyelembevételével:

$$d_{[lm]} = \frac{1}{2}\,(\delta_l{}^q\delta_m{}^r - \delta_l{}^r\delta_m{}^q)\,d_{qr} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{qrs}\,\varepsilon_{lms}\,d_{qr} = -\varepsilon_{lms}\left(-\frac{1}{2}\,\varepsilon^{qrs}\,d_{qr}\right)\ . \tag{6.22}$$

A kerek zárójelbe foglalt képletrész alapján írható

$$\boxed{\mathbf{d}^{(a)} = -\frac{1}{2}\,d_{qr}\,\mathbf{g}^q \times \mathbf{g}^r = \underbrace{-\frac{1}{2}\,\varepsilon^{qrs}\,d_{qr}}_{d^{(a)\,s}}\,\mathbf{g}_s} \tag{6.23}$$

összefüggés a $\boldsymbol{D}$ tenzor $\mathbf{d}^{(a)} = d^{(a)\,s}\mathbf{g}_s$ vektorinvariánsát értelmezi.

A képletből kiolvasható a vektorinvariáns számításának szabálya: írjuk a diádikus szorzás műveleti jele helyére a vektoriális szorzás műveleti jelét a tenzor előállításában, és szorozzuk meg az eredményt $-1/2$-vel.

Az invariáns szó arra utal, hogy valódi vektor a $d^{(a)\,s}$ vektorinvariáns, ha a d_{qr} valódi tenzor. Ennek formális igazolását gyakorlatra hagyjuk.

A (6.22) és (6.23) egyenletek egybevetése szerint

$$d_{[lm]} = -\varepsilon_{lms}\,d^{(a)\,s}\,. \tag{6.24}$$

Ha átszorozzuk ezt az egyenletet a tetszőleges b^m vektorral akkor a

$$d_{[lm]}b^m = -\varepsilon_{lms}\,d^{(a)\,s}\,b^m = \varepsilon_{lsm}\,d^{(a)\,s}\,b^m\,, \tag{6.25a}$$

[1] Az angolnyelvű szakirodalom a $\boldsymbol{D}_{\text{sym}}$ és $\boldsymbol{D}_{\text{skew}}$ módon jelöli a tenzor szimmetrikus és ferdeszimmetrikus részét.

illetve szimbolikus alakban írva a

$$\boldsymbol{D}_{\text{asz}} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{d}^{(a)} \times \mathbf{b} \tag{6.25b}$$

eredményt kapjuk.

A vektorinvariánssal kapcsolatos eddigi eredmények a következő módon összegezhetők:

Legyen az $\boldsymbol{S}$ nem azonosan zérus ferdeszimmetrikus tenzor. Ekkor létezik egy és csakis egy olyan $\mathbf{s}^{(a)}$ vektor, hogy az

$$\boxed{\boldsymbol{S} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{s}^{(a)} \times \mathbf{v}} \tag{6.26}$$

egyenlet minden lehetséges $\mathbf{v}$-re fennáll, és megfordítva valamely $\mathbf{s}^{(a)}$ vektorhoz tartozik egy és csakis egy ferdeszimmetrikus másodrendű $\boldsymbol{S}$ tenzor, amelyre nézve a (6.26) bármilyen $\mathbf{v}$-re teljesül. Ha az $\boldsymbol{S}$ tenzor adott, akkor

$$s^{(a)r} = -\frac{1}{2}\,\varepsilon^{pqr}\, s_{pq} \tag{6.27a}$$

ha pedig az $s^{(a)r}$ adott, akkor

$$[s_{pq}] = \sqrt{g_o} \begin{bmatrix} 0 & -s^{(a)3} & s^{(a)2} \\ s^{(a)3} & 0 & -s^{(a)1} \\ -s^{(a)2} & s^{(a)1} & 0 \end{bmatrix} \tag{6.27b}$$

Megjegyezzük, hogy a (6.27b) a (6.24) következménye. Ennek formális ellenőrzését gyakorlatra hagyjuk.

6.1.4. Jellegzetes mennyiségek. A $\boldsymbol{D}$ másodrendű tenzor nyomát, más elnevezéssel első skalárinvariánsát, a

$$\boxed{\operatorname{tr} \boldsymbol{D} = D_I = \boldsymbol{I} \cdot\cdot\, \boldsymbol{D}} \tag{6.28}$$

kifejezés értelmezi. Nem nehéz ellenőrizni, hogy

$$\operatorname{tr} \boldsymbol{D} = \overbrace{\mathbf{g}_k \otimes \underbrace{\mathbf{g}^k \cdot d_{pq}\, \mathbf{g}^p}_{\cdot}}^{\cdot} \otimes \mathbf{g}^q = \delta_k{}^p\, g^{kq}\, d_{pq} = \delta_k{}^p d_p{}^k = d_k{}^k \tag{6.29}$$

az első skalárinvariáns számításának képlete. Az értelmezés alapján könnyű meggyőződni arról is, hogy

$$\operatorname{tr} \boldsymbol{D} = \operatorname{tr} \boldsymbol{D}^T \tag{6.30a}$$

továbbá, hogy bármely $\boldsymbol{D}$ és $\boldsymbol{S}$ másodrendű tenzor esetén

$$\operatorname{tr}\,(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{S}) = \operatorname{tr} \boldsymbol{D} + \operatorname{tr} \boldsymbol{S}\,, \tag{6.30b}$$

$$\operatorname{tr}\,(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{S}) = \operatorname{tr}\,(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{D})\,, \tag{6.30c}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}\left(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{S}^T\right) = \operatorname{tr}\left(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{D}^T\right) = \boldsymbol{S}\cdot\cdot\,\boldsymbol{D} = \\ = \operatorname{tr}\left(\boldsymbol{D}^T\cdot\boldsymbol{S}\right) = \operatorname{tr}\left(\boldsymbol{S}^T\cdot\boldsymbol{D}\right) = \boldsymbol{S}^T\cdot\cdot\,\boldsymbol{D}^T\,. \end{aligned} \tag{6.30d}$$

Tekintsük továbbra is a $\boldsymbol{D}$ és $\boldsymbol{S}$ másodrendű tenzorokat. Legyen most a $\boldsymbol{D}$ szimmetrikus, az $\boldsymbol{S}$ pedig ferdeszimmetrikus. Ekkor

$$\boldsymbol{D}\cdot\cdot\,\boldsymbol{S} = d_{kl}\, s^{kl} = 0 \tag{6.31}$$

Valóban, ha kiírjuk a jobboldali összeget és kihasználjuk d_{kl} szimmetrikus és s^{kl} ferdeszimmetrikus voltát, akkor kapjuk, hogy

$$\boldsymbol{D}\cdot\cdot\,\boldsymbol{S} = d_{11}\underbrace{s^{11}}_{0} + d_{22}\underbrace{s^{22}}_{0} + d_{33}\underbrace{s^{33}}_{0} +$$
$$+ d_{12}\,s^{12} + \underbrace{d_{21}\,s^{21}}_{-d_{12}\,s^{12}} + d_{23}\,s^{23} + \underbrace{d_{32}\,s^{32}}_{-d_{23}\,s^{23}} + d_{31}\,s^{31} + \underbrace{d_{13}\,s^{13}}_{-d_{31}\,s^{31}} = 0\,.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy a szimmetrikus $\boldsymbol{D}$ másodrendű és az abszolút ferdeszimmetrikus $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ harmadrendű permutációs tenzor esetén hogy

$$\boldsymbol{D}\cdot\cdot\,\boldsymbol{\mathcal{E}} = 0 \qquad \text{és} \qquad \boldsymbol{\mathcal{E}}\cdot\cdot\,\boldsymbol{D} = 0\,, \tag{6.32a}$$

vagy ami ugyanaz, hogy

$$d^{kl}\varepsilon_{klr} = 0 \qquad \text{és} \qquad \varepsilon_{klr}d^{lr} = 0\,. \tag{6.32b}$$

Általánosítás: valamely tenzor szimmetrikus és egy másik tenzor ferdeszimmetrikus indexpárja tekintetében végrehajtott kettős skaláris szorzás (kettős kontrakció) mindig zérus értékű.

A vektor normája a vektor abszolút értéke.

Az $\boldsymbol{S}$ másodrendű tenzor normáját az $|\boldsymbol{S}|$ (vagy az $\|\,\boldsymbol{S}\,\|$) módon jelöljük és az

$$|\boldsymbol{S}| = \sqrt{\boldsymbol{S}\cdot\cdot\,\boldsymbol{S}} = \sqrt{s^{kl}\,s_{kl}} \tag{6.33}$$

módon értelmezzük. Megjegyezzük, hogy a $\boldsymbol{D}\cdot\cdot\,\boldsymbol{S}$ szorzat eleget tesz

$$|\boldsymbol{D}\cdot\cdot\,\boldsymbol{S}| \le |\boldsymbol{D}||\boldsymbol{S}| \tag{6.34}$$

Schwartz-féle egyenlőtlenségnek.

6.1.5. A másodrendű tenzor inverze. Az $\boldsymbol{A}$ másodrendű tenzor inverzét a

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \left(a^{-1}\right)_{kl}\,\mathbf{g}^k\otimes\mathbf{g}^l = \left(a^{-1}\right)^{k}{}_{l}\,\mathbf{g}_k\otimes\mathbf{g}^l = \ldots = \left(a^{-1}\right)^{kl}\,\mathbf{g}_k\otimes\mathbf{g}_l \tag{6.35}$$

módon jelöljük. Az $\boldsymbol{A}^{-1}$ inverz a

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I} \qquad | \qquad a_{kl}\left(a^{-1}\right)^{lm} = a_k{}^{l}\left(a^{-1}\right)_{l}{}^{m} = \delta_k{}^{m} \tag{6.36a}$$

és

$$\boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I} \qquad | \qquad \left(a^{-1}\right)^{lm}a_{mk} = \left(a^{-1}\right)^{l}{}_{m}a^{m}{}_{k} = \delta^{l}{}_{k} \tag{6.36b}$$

összefüggéseknek köteles eleget tenni. A $(3.8)_1$ és $(3.10)_1$ képletek alapján alkalmas indexátnevezésekkel írható, hogy

$$\left(a^{-1}\right)^{lm} = \frac{1}{2!\,|a_{sj}|}\,e^{ljk}e^{mst}\,a_{sj}\,a_{tk}\,. \tag{6.37a}$$

Hasonlóan kapjuk a $(3.8)_2$ és $(3.10)_2$ képletek alapján, hogy

$$\left(a^{-1}\right)_{lm} = \frac{1}{2!\,|a^{sj}|}\,e_{ljk}e_{mst}\,a^{sj}\,a^{tk}\,. \tag{6.37b}$$

Tekintsük a

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\,; \qquad c^{k}{}_{l} = a^{k}{}_{m}\,b^{m}{}_{l} \tag{6.38a}$$

szorzatot, ahol $\boldsymbol{A}$ és $\boldsymbol{B}$ másodrendű tenzorok. A fenti szorzat inverzét a

$$\boldsymbol{C}^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\cdot\boldsymbol{A}^{-1}; \qquad \left(c^{-1}\right)^{k}{}_{l} = \left(b^{-1}\right)^{k}{}_{m}\left(a^{-1}\right)^{m}{}_{l} \tag{6.38b}$$

módon számítjuk. Valóban, egyszerű számítással adódik, hogy

$$\boldsymbol{C}^{-1}\cdot\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}^{-1}\cdot\underbrace{\boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{I}}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^{-1}\cdot\underbrace{\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{B}^{-1}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}\,.$$

Hasonlóan ellenőrizhető, hogy

$$\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{C}^{-1}=\boldsymbol{I}$$

Az $\boldsymbol{A}$ másodrendű tenzor transzponáltjának inverze eleget tesz a

(6.39) $$\boxed{\left(\boldsymbol{A}^{T}\right)^{-1}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{T}}$$

összefüggésnek. Szavakban: *tenzor transzponáltjának az inverze az inverz transzponáltja.* Valóban az

$$\left(a^{T}\right)_{lm}=a_{ml}$$

reláció, valamint a (6.37a) összefüggés alapján adódik, hogy

$$\left[\left(a^{T}\right)^{lm}\right]^{-1}=\frac{1}{2!\,|a^{T}_{sj}|}\,e^{ljk}e^{mst}\,\left(a^{T}\right)_{sj}\,\left(a^{T}\right)_{tk}=\frac{1}{2!\,|a_{sj}|}\,e^{ljk}e^{mst}\,a_{js}\,a_{kt}=\left(a^{-1}\right)^{ml}\,.$$

Ezt kellett bizonyítani.

6.2. Másodrendű tenzorok sajátértékfeladata

6.2.1. A feladat megfogalmazása. Tekintsük a másodrendű $\boldsymbol{A}$ tenzorhoz tartozó leképezést. Keressük azokat az irányokat – ezeket főirányoknak nevezzük majd –, amelyekre nézve fennáll, hogy az irányt kijelölő

(6.40) $$\mathbf{n}=n_k\mathbf{g}^k;\qquad\qquad n_k\,n^k=1$$

egységvektor és a hozzátartozó $\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{n}$ képvektor egymással párhuzamos. A 6.1. ábra ezt az esetet szemlélteti. Ha a két vektor párhuzamos, akkor fennáll az

(6.41) $$\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{n}=\lambda\mathbf{n};\qquad\qquad a^k{}_l\,n^l=\lambda n^k$$

egyenlet, ahol a λ, hasonlóan az n_1, n_2 és n_3-hoz, egyelőre ismeretlen paraméter. A főirányt kijelölő $\mathbf{n}$ vektort sajátvektornak, a reá merőleges síkot pedig fősíknak fogjuk nevezni. Mivel az $\boldsymbol{I}$ egységtenzor minden vektort önmagára képez le a (6.41) egyenlet átírható a

(6.42a) $$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\cdot\mathbf{n}\lambda=\mathbf{0}\quad|\quad\left(a^k{}_l-\lambda\delta^k{}_l\right)n^l=0$$

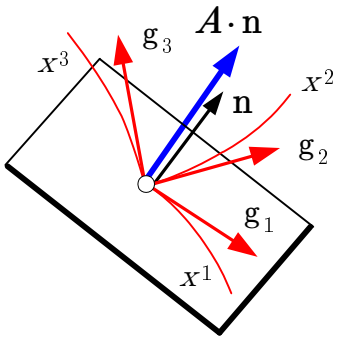
alakba. Az utóbbi egyenletrendszer az n^l számítására szolgáló homogén lineáris egyenletrendszer:

(6.42b) $$\begin{aligned}\left(a^1{}_1-\lambda\right)n^1+a^1{}_2n^2+a^1{}_3n^3&=0\\ a^2{}_1n^1+\left(a^2{}_2-\lambda\right)n^2+a^2{}_3n^3&=0\\ a^3{}_1n^1+a^3{}_2n^2+\left(a^3{}_3-\lambda\right)n^3&=0\end{aligned}$$

Vezessük be az

(6.43) $$d^k{}_l=a^k{}_l-\lambda\delta^k{}_l$$

jelölést és legyen $P_3(\lambda)=-|d^k{}_l|$. Ez a függvény λ köbös polinomja, az ún. karakterisztikus polinom. A (6.42b) egyenletrendszernek csak akkor van triválistól különböző megoldása,



6.1. ábra. Párhuzamos tárgy és képvektor

ha eltűnik az egyenletrendszer determinánsa:

$$P_3(\lambda) = -|d^k{}_l| = -|a^k{}_l - \lambda\delta^k{}_l| = \\ = -\frac{1}{3!}e_{klm}e^{pqr}\left(a^k{}_p - \lambda\delta^k{}_p\right)\left(a^l{}_q - \lambda\delta^l{}_q\right)\left(a^m{}_r - \lambda\delta^m{}_r\right) = 0\,. \tag{6.44}$$

A

$$P_3(\lambda) = \lambda^3 - A_I\,\lambda^2 + A_{II}\,\lambda - A_{III} = 0 \tag{6.45}$$

egyenlet – az A_I, A_{II} és A_{III} skalárok számítására még visszatérünk – a λ paraméter értékét meghatározó karakterisztikus egyenlet. Mivel a (ξ) KR-ben

$$'d^k{}_l = \tau_m{}^k\, d^m{}_n\, t_l{}^n$$

a determinánsok (3.11) szorzástételét, valamint a (4.20) képletet kihasználva kapjuk, hogy

$$'P_3(\lambda) = -|'d^k{}_l| = -\underbrace{|\tau_m{}^k|\,|t_l{}^n|}_{\tau\,t=1}\,|d^m{}_n| = -|d^m{}_n| = P_3(\lambda)\,. \tag{6.46}$$

Szavakba foglalva: a karakterisztikus polinom KR független. A λ^2, λ és λ^0 hatványok $-A_I$, A_{II} és $-A_{III}$ együtthatói pedig invariánsok. Ezeket skalárinvariánsoknak nevezzük.

Mivel a karakterisztikus polinom köbös van legalább egy valós gyöke. Jelölje λ_1 a polinom valós gyökét és $\mathbf{n}_1$ a valós gyökhöz tartozó főirányt. Legyen az eddigiektől eltérően és a most következő gondolatmenetben olyan *lokálisan kartéziuszi KR* a (ξ) görbevonalú KR, hogy $'\mathbf{g}_1 = \mathbf{n}_1$ – ezek a feltevések nem sértik az általánosságot. Ebben a KR-ben

$$\boldsymbol{A} = 'a^k{}_l\,'\mathbf{g}_k \otimes '\mathbf{g}^l$$

az $\boldsymbol{A}$ tenzor alakja. A (6.41) képlet alapján fennáll, hogy

$$\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{n}_1 = \boldsymbol{A}\cdot'\mathbf{g}_1 = \lambda_1\,'\mathbf{g}_1\,.$$

Részletesen kiírva

$$'a^k{}_l\,'\mathbf{g}_k\,\underbrace{'\mathbf{g}^l\cdot'\mathbf{g}_1}_{'\delta^l{}_1} = 'a^k{}_1\,'\mathbf{g}_k = \lambda_1\,'\mathbf{g}_1\,,$$

ahonnan

$$'a^1{}_1 = \lambda_1 \qquad \text{és} \qquad 'a^2{}_1 = 'a^3{}_1 = 0\,.$$

A továbbiakban mindig feltételezzük, hogy szimmetrikus az $\boldsymbol{A}$ tenzor. Ez esetben

$$\left['a^k{}_l\right] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 'a^2{}_2 & 'a^2{}_3 \\ 0 & 'a^3{}_2 & 'a^3{}_3 \end{bmatrix}$$

és ennek alapján a bevezetett lokálisan kartéziuszi KR-ben

$$-|'d^k{}_l| = -\begin{vmatrix} \lambda_1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 'a^2{}_2-\lambda & 'a^2{}_3 \\ 0 & 'a^3{}_2 & 'a^3{}_3-\lambda \end{vmatrix} = \\ = -\left(\lambda_1-\lambda\right)\left[\lambda^2 - \lambda\left('a^2{}_2 + 'a^3{}_3\right) + 'a^2{}_2\,'a^3{}_3 - \left('a^3{}_2\right)^2\right] = 0$$

a karakterisztikus egyenlet. A karakterisztikus egyenletnek $\lambda = \lambda_1$ és a λ-ban másodfokú szögletes zárójelben szedett szorzótényező eltűnése alapján

$$\lambda_{2,3} = \frac{1}{2}\left[{}'a^2{}_2 + {}'a^3{}_3 \pm \sqrt{\left({}'a^2{}_2 + {}'a^3{}_3\right)^2 - 4\left({}'a^2{}_2\,{}'a^3{}_3 - \left({}'a^3{}_2\right)^2\right)}\right] = \tag{6.47}$$

$$= \frac{1}{2}\left[{}'a^2{}_2 + {}'a^3{}_3 \pm \sqrt{\left({}'a^2{}_2 - {}'a^3{}_3\right)^2 + 4\left({}'a^3{}_2\right)^2}\right]$$

a gyökei. Mivel a diszkrimináns (a gyökjel alatt álló kifejezés) pozitív adódik a következtetés, hogy valósak a szimmetrikus tenzorok sajátértékei.

Ha pozitív definit az $\boldsymbol{A}$ tenzor, akkor a sajátértékek pozitív mennyiségek. Valóban, ha az $\mathbf{n}$ sajátvektor, akkor $\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{n} = \lambda\mathbf{n}$, következőleg a tenzor pozitív definit volta miatt

$$\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{n} = \lambda\underbrace{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}_{1} = \lambda > 0\,. \tag{6.48}$$

Megmutatjuk az alábbiakban, hogy merőlegesek egymásra a különböző sajátértékekhez tartozó főirányok. Legyen ω és λ két különböző sajátérték. A vonatkozó főirányokat $\mathbf{m}$ és $\mathbf{n}$ egységvektorok jelölik ki. Nyilvánvaló, hogy fennállnak a

$$\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{m} = \omega\,\mathbf{m} \qquad \text{és} \qquad \boldsymbol{A}\cdot\mathbf{n} = \lambda\,\mathbf{n}$$

egyenletek. Innen azonnal következik, hogy

$$\omega\,\mathbf{n}\cdot\mathbf{m} = \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{m} = \mathbf{m}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{n} = \lambda\,\mathbf{m}\cdot\mathbf{n}\,, \tag{6.49}$$

azaz, hogy

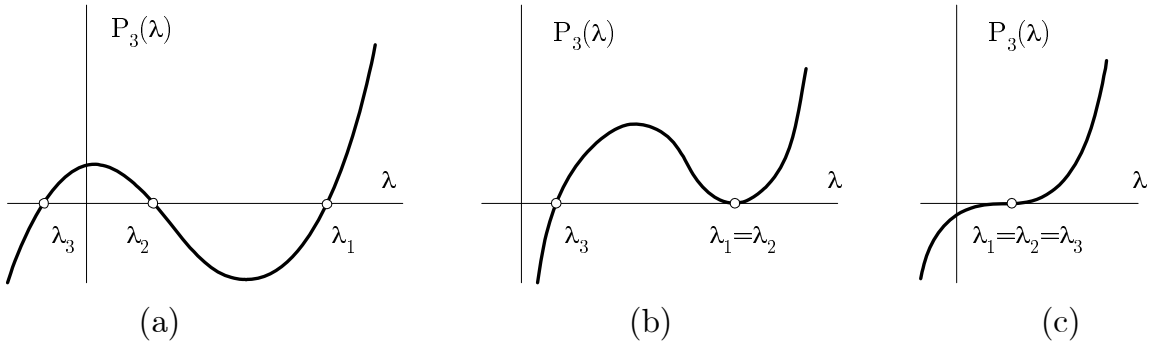
$$\underbrace{(\omega-\lambda)}_{\neq 0}\,\mathbf{m}\cdot\mathbf{n} = 0$$

vagyis

$$\mathbf{m}\cdot\mathbf{n} = 0\,.$$

Mivel $|\mathbf{m}| = 1$ és $|\mathbf{n}| = 1$ a két különböző sajátértékhez tartozó főirányok valóban merőlegesek.

6.2.2. A főirányok számítása a gyökök ismeretében. Az alábbiak a főirányok számítását tekintik át, ha ismeretesek a $P_3(\lambda)$ karakterisztikus polinom gyökei. A gyökök nagyságát tekintve három jellegzetes esetet különböztethetünk meg: a gyökök különböznek egymástól (minden gyök egyszeres), van két egybeeső gyök (egy gyök kétszeres, egy gyök egyszeres), mindhárom gyök egybeesik (egy háromszoros gyök van). A 6.2. ábra ezekre az esetekre külön-külön szemlélteti a karakterisztikus polinomot. Az egyes eseteket az alábbiakban vesszük sorra.



6.2. ábra. A karakterisztikus polinom gyökei

(a) Legyenek különbözőek a $P_3(\lambda)=0$ karakterisztikus egyenlet gyökei: $\lambda_1>\lambda_2>\lambda_3$. Jelölje $D^m{}_n$ az n^1, n^2 és n^3-t adó

$$\begin{aligned}
&\left(a^1{}_1-\lambda\right)n^1+a^1{}_2n^2+a^1{}_3n^3=d^1{}_1n^1+d^1{}_2n^2+d^1{}_3n^3=0\\
&a^2{}_1n^1+\left(a^2{}_2-\lambda\right)n^2+a^2{}_3n^3=d^2{}_1n^1+d^2{}_2n^2+d^2{}_3n^3=0\\
&a^3{}_1n^1+a^3{}_2n^2+\left(a^3{}_3-\lambda\right)n^3=d^3{}_1n^1+d^3{}_2n^2+d^3{}_3n^3=0
\end{aligned}\tag{6.50}$$

homogén ER együtthatómátrixa $d^n{}_m$ eleméhez tartozó előjeles aldeterminánst. Vegyük észre, hogy

$$\frac{\mathrm{d}d^k{}_l}{\mathrm{d}\lambda}=-\delta^k{}_l\,.$$

Egyszerűen adódik a (6.44)-ból, hogy

$$\begin{aligned}
P_3'=\frac{\mathrm{d}P_3}{\mathrm{d}\lambda}&=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\,\frac{1}{3!}\,e_{klm}e^{pqr}\,d^k{}_p\,d^l{}_q\,d^m{}_r=\\
&=\frac{1}{3}\,\frac{1}{2}\,e^{pqr}e_{klm}\left[\delta^k{}_p\,d^l{}_q\,d^m{}_r+d^k{}_p\,\delta^l{}_q\,d^m{}_r+d^k{}_p\,d^l{}_q\,\delta^m{}_r\right]=\\
&=\frac{1}{2}\,e^{kpq}e_{klm}\,d^l{}_q\,d^m{}_r=D^1{}_1+D^2{}_2+D^3{}_3\,.
\end{aligned}\tag{6.51}$$

Mivel a három gyök különböző ezért egyszeres, következésképp adott λ_k esetén legalább az egyike a $D^K{}_K$ determinánsoknak, mondjuk a $D^3{}_3$ zérustól különböző kell, hogy legyen. Ha ugyanis nem így lenne, eltűnne a $P_3'|_{\lambda=\lambda_k}$ derivált, következőleg nem lenne egyszeres a λ_k gyök – lásd a 6.2.(b) ábrarészlet $\lambda_1=\lambda_2$ kettős gyökét, ahol vízszintes az érintő.

Ha nem zérus a $D^3{}_3(\lambda_k)$ determináns, akkor az n^1 és n^2 ismeretleneket tekintve lineárisan független az n^3-at paraméterként tartalmazó (6.50) lineáris egyenletrendszer első két egyenlete

$$\begin{aligned}
d^1{}_1n^1+d^1{}_2n^2&=-d^1{}_3n^3\,,\\
d^2{}_1n^1+d^2{}_2n^2&=-d^2{}_3n^3
\end{aligned}$$

ahonnan

$$n^1=\frac{D^1{}_3}{D^3{}_3}\,n^3\,,\qquad n^2=\frac{D^2{}_3}{D^3{}_3}\,n^3\,.$$

Itt

$$\begin{gathered}
D^1{}_3=d^1{}_2\,d^2{}_3-d^2{}_2\,d^1{}_3\,,\;\; D^2{}_3=d^2{}_1\,d^1{}_3-d^1{}_1\,d^2{}_3\,,\\
D^3{}_3=d^1{}_1\,d^2{}_2-d^2{}_1\,d^1{}_2\,.
\end{gathered}$$

A paraméternek vett n^3 a normálási feltételből számítható.

Ha ortogonális a KR – az n^3 számítását csak erre az esetre részletezzük formálisan – a $(6.40)_2$ normálási feltétel az

$$n^1\,g_{11}\,n^1+n^2\,g_{22}\,n^2+n^3\,g_{33}\,n^3=1$$

alakban írható fel. Az n^1 és n^2 helyettesítését követően kapjuk, hogy

$$n^3=\frac{D^3{}_3}{D}\,,$$

ahol

$$D^2=\left(D^1{}_3\right)^2g_{11}+\left(D^2{}_3\right)^2g_{22}+\left(D^3{}_3\right)^2g_{33}\,.$$

Az n^3 felhasználásával egységes alakban írható fel a főirányt kijelölő $\mathbf{n}$ vektor három kontravariáns koordinátája:

$$\underset{(k)}{n}{}^l=\frac{D^l{}_3}{D}\,.$$

Az n alatt álló (k) jelzi, hogy a λ_k sajátértékhez tartozóan végeztük el a számítást.

Nem nehéz ellenőrizni, hogy a kapott megoldás kielégíti a (6.50) lineáris egyenletrendszer harmadik egyenletét. Helyettesítés után írhatjuk, hogy

$$d^3{}_1 n^1 + d^3{}_2 n^2 + d^3{}_3 n^3 = \\ = \frac{1}{D} \underbrace{\left[d^3{}_1 D^1{}_3 + d^3{}_2 D^2{}_3 + d^3{}_3 D^3{}_3 \right]}_{\text{Kifejtés utolsó sor szerint.}} |_{\lambda=\lambda_k} = \frac{1}{D} \, |d^k{}_l||_{\lambda=\lambda_k} = 0$$

(A szögletes zárójelben álló kifejezés a (6.50) egyenletrendszer együttható mátrixának determinánsa.) A fentebb mondottak alapján minden egyes λ_k gyökhöz meghatározható olyan $\mathbf{n}_k$ irányvektor, hogy

$$\boldsymbol{A} \cdot \mathbf{n}_k = \lambda_k \, \mathbf{n}_k \, .$$

Az $\mathbf{n}_k$ vektorok előjelét szabadon lehet megválasztani. Következésképp mindig lehetséges olyan választás, hogy az $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ és $\mathbf{n}_3$ vektorokhoz tartozó irányok jobbsodratú kartéziuszi KR-t alkossanak. Ebben a KR-ben

$$\boldsymbol{A} = \lambda_1 \, \mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1 + \lambda_2 \, \mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{n}_2 + \lambda_3 \, \mathbf{n}_3 \otimes \mathbf{n}_3 \tag{6.52a}$$

az $\boldsymbol{A}$ diádikus előállítása és

$$\left[a_k{}^l \right] = \left[a^k{}_l \right] = \left[a^{kl} \right] = [a_{kl}] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \tag{6.52b}$$

a tenzor mátrixa.

(b) Tegyük fel, hogy kétszeres gyök esetén $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$. Az előzőekben áttekintett gondolatmenet és eredmények változatlanul érvényesek maradnak a λ_3 és $\mathbf{n}_3$-ra nézve, azaz

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_3 = 0 \qquad \text{és} \qquad \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_3 = 0 \, . \tag{6.53}$$

Ami a kettős gyököt illeti

$$P_3'(\lambda_1) = P_3'(\lambda_2) = 0 \, .$$

A második derivált (a 6.51) képlet alapján írható fel:

$$2P_3'' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \, e^{kpq} e_{klm} \, d^l{}_p \, d^m{}_q = -e^{kpq} e_{klm} \, \left(\delta^l{}_p \, d^m{}_q + d^l{}_p \, \delta^m{}_q \right) = \\ = -\underbrace{e^{klq} e_{klm}}_{2\delta^q{}_m} d^m{}_q - \underbrace{e^{kpq} e_{kpm}}_{2\delta^p{}_l} d^l{}_p = -4 d^m{}_m$$

Innen

$$-\frac{1}{2} \, P_3'' = d^1{}_1 + d^2{}_2 + d^3{}_3 = \left(a^1{}_1 - \lambda \right) + \left(a^2{}_2 - \lambda \right) + \left(a^3{}_3 - \lambda \right) \, ,$$

ahol $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ esetén a jobboldalon álló összeg legalább egy összeadandója zérus, ellenkező esetben ui. három lenne a gyök multiplicitása. Az n^1, n^2 és n^3 ismeretlenek meghatározására két egyenlet, a (6.50) valamelyik, mondjuk az első egyenlete, valamint a (6.40) normálási feltétel szolgál. Az így kapott megoldással identikusan teljesül a (6.50) második és harmadik egyenlete. Ez annak a következménye, hogy

$$P_3(\lambda_1) = 0 \qquad \text{és} \qquad P_3'(\lambda_1) = 0 \, .$$

Kétszeres gyök esetén a $d^k{}_l$ együtthatómátrix rangja egy, következésképp zérus értékű valamennyi adjungált: $D^l{}_k$=0. Ebből adódóan identikusan teljesülnek az n^1-re vonatkozó

$$n^1 = -\frac{1}{d^1{}_1} \left[d^1{}_2 \, n^2 + d^1{}_3 \, n^3 \right]$$

megoldás második és harmadik egyenletbe történő visszahelyettesítésével kapott

$$\begin{aligned} d^1{}_1\,\left(d^2{}_1\,n^1+d^2{}_2\,n^2+d^2{}_3\,n^3\right) = \\ = -d^2{}_1\,\left(d^1{}_2\,n^2+d^1{}_3\,n^3\right)+d^1{}_1\,d^2{}_2\,n^2+d^1{}_1\,d^2{}_3\,n^3 = \\ = \left(d^1{}_1\,d^2{}_2+d^2{}_1\,d^1{}_2\right)\,n^2-\left(d^1{}_3\,d^2{}_1-d^1{}_1\,d^2{}_3\right)\,n^3 = \\ = \underbrace{D^3{}_3}_{\equiv 0}\,n^2-\underbrace{D^2{}_3}_{\equiv 0}\,n^3=0\,, \end{aligned}$$

illetve

$$\underbrace{D^3{}_2}_{\equiv 0}\,n^2-\underbrace{D^2{}_2}_{\equiv 0}\,n^3=0$$

egyenletek.

Az $\mathbf{n}_2$ vektort úgy érdemes megválasztani, hogy teljesüljön az $\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2=0$ ortogonalitási feltétel. Kettős gyök esetén tehát az egyértelműen meghatározott $\mathbf{n}_3$ főirány mellett a másik kettő pedig elvben szabadon felvehető az $\mathbf{n}_3$-ra merőleges síkban, célszerű azonban betartani az említett ortogonalitási feltételt. Az $\boldsymbol{A}$ tenzor diádikus előállítását annak figyelembevételével kapjuk, hogy most $\lambda_1=\lambda_2$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} = \lambda_1\,\left(\mathbf{n}_1\otimes\mathbf{n}_1+\mathbf{n}_2\otimes\mathbf{n}_2\right)+\lambda_3\,\mathbf{n}_3\otimes\mathbf{n}_3 = \\ = \lambda_1\,\underbrace{\left(\mathbf{n}_1\otimes\mathbf{n}_1+\mathbf{n}_2\otimes\mathbf{n}_2+\mathbf{n}_3\otimes\mathbf{n}_3\right)}_{\boldsymbol{I}}+\left(\lambda_3-\lambda_1\right)\,\mathbf{n}_3\otimes\mathbf{n}_3\,, \end{aligned}$$

azaz

$$\boldsymbol{A}=\lambda_1\,\left(\boldsymbol{I}-\mathbf{n}_3\otimes\mathbf{n}_3\right)+\lambda_3\,\mathbf{n}_3\otimes\mathbf{n}_3\,. \tag{6.54}$$

Figyelemmel arra, hogy a főirányokat kijelölő $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ és $\mathbf{n}_3$ előjele megváltoztatható, mindig biztosíthatjuk, hogy az $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ és $\mathbf{n}_3$ vektorokhoz tartozó irányok jobbsodratú kartéziuszi KR-t alkossanak.

(c) Háromszoros gyök esetén $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$ és

$$\boldsymbol{A}=\lambda_1\,\left(\mathbf{n}_1\otimes\mathbf{n}_1+\mathbf{n}_2\otimes\mathbf{n}_2+\mathbf{n}_3\otimes\mathbf{n}_3\right)=\lambda_1\boldsymbol{I}\,, \tag{6.55}$$

következőleg bármely irány főirány. Az ilyen tenzort *izotróp vagy gömbi tenzornak* nevezzük. Az utóbbi elnevezést az indokolja, hogy a vonatkozó geometriai leképezés gömböt rendel gömbhöz. Az is nyilvánvaló, hogy az $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ és $\mathbf{n}_3$ vektorok nem egyértelműen meghatározottak, azonban mindig megválaszthatjuk őket oly módon, hogy a hozzájuk tartozó irányok jobbsodratú kartéziuszi KR-t alkossanak.

Összhangban az eddigiekkel, visszautalunk ehelyütt a 6.2. ábrára, a λ_k sajátértékeket nagyság szerint rendezettnek tekintjük, vagyis mindig úgy választjuk meg az indexüket, hogy fennálljon a

$$\lambda_1\geq\lambda_2\geq\lambda_3 \tag{6.56}$$

reláció.

6.2.3. A főtengelytétel. A 6.2.1. és 6.2.2. szakaszok eredményei a főtengelytételben összegezhetők. A tétel megfogalmazása előtt a szóhasználat egyértelművé tétele érdekében az alábbiakban állapodunk meg.

Valamely tenzor működési pontján azt a pontot értjük, amelyhez a tenzort kötjük. A működési pont vagy térpont, ha térpontokhoz kötött tenzorokról van szó, vagypedig valamely anyagi test pontja, ha a tekintett anyagi pont fizikai állapotát leíró és az adott anyagi ponthoz kötött tenzorról van szó.

A λ sajátértékhez tartozó ún. *karakterisztikus teret* – ez egy egyenes, egy sík, illetve a háromdimenziós euklideszi tér lehet – azon $\mathbf{n}$, $|\mathbf{n}|=1$ vektorok feszítik ki, amelyekre nézve ugyanazt a sajátértéket tekintve fennáll a (6.40) egyenlet. A vonatkozó karakterisztikus tér dimenziója – egyenesre egy, síkra kettő, teljes térre pedig három, – a vonatkozó λ

sajátérték multiplicitása. A szimmetrikus $\boldsymbol{A}$ tenzor *spektruma* a λ sajátértékek a (6.55) szerint rendezett

$$(\lambda_1\,,\lambda_2\,,\lambda_3)$$

listája, amelyben minden sajátértéket annyiszor veszünk figyelembe amennyi a sajátérték multiplicitása.

A főtengelytétel a következő módon fogalmazható meg: Legyen szimmetrikus az $\boldsymbol{A}$ tenzor. Ekkor létezik a térben olyan ortonormális bázis melyet az $\boldsymbol{A}$ sajátvektorai feszítenek ki. Legyen $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ és $\mathbf{n}_3$ ilyen bázis, és legyenek nagyság szerint rendezettek a λ_1, λ_2 és λ_3 sajátértékek. Ekkor azok kiadják a teljes spektrumot és

$$\boldsymbol{A}=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i\,\mathbf{n}_i\otimes\mathbf{n}_i\,. \tag{6.57}$$

Megfordítva, ha az $\boldsymbol{A}$ felírható a (6.57) alakban, aholis ortonormálisak az $\mathbf{n}_i$ vektorok, akkor λ_1, λ_2 és λ_3 az $\boldsymbol{A}$ sajátértéke, $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ és $\mathbf{n}_3$ pedig a sajátértékekhez tartozó sajátvektorok.

Fennáll továbbá, hogy:

(a) Az $\boldsymbol{A}$-nak akkor és csak akkor van három különböző sajátértéke, ha a vonatkozó karakterisztikus tereket három egymásra kölcsönösen merőleges és a tenzor működési pontján áthaladó egyenes alkotja.

(b) Az $\boldsymbol{A}$-nak akkor és csak akkor van két különböző sajátértéke, ha megadható az

$$\boldsymbol{A}=\omega\,\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}+\lambda\,(\boldsymbol{I}-\mathbf{n}\otimes\mathbf{n})$$

alakban, ahol $|\mathbf{n}|=1$, és

$$\lambda_1=\omega\,,\ \ \lambda_2=\lambda_3=\lambda;\qquad\qquad \text{ha } \omega>\lambda$$

továbbá

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda\,,\ \ \lambda_3=\omega;\qquad\qquad \text{ha } \omega<\lambda\,.$$

Ebben az esetben a vonatkozó karakterisztikus tereket az $\mathbf{n}$ által kijelölt egyenes, és a reá merőleges sík alkotják a tenzor működési pontjában.

(c) Az $\boldsymbol{A}$-nak akkor és csak akkor van egy sajátértéke, ha

$$\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{I}\,. \tag{6.58}$$

Ekkor a λ sajátérték, míg a teljes euklideszi tér karakterisztikus tér. Megfordítva, ha a teljes euklideszi tér a karakterisztikus tér, akkor az $\boldsymbol{A}$ megadható a (6.58) alatti alakban.

Megjegyzések:

1. A (6.57) alatti előállítást az $\mathbb{A}$ tenzor spektrális felbontásának szokás nevezni. Az $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ és $\mathbf{n}_3$ sajátvektorok alkotta bázisban

$$\left[a_k{}^l\right]=\left[a^k{}_l\right]=\left[a^{kl}\right]=[a_{kl}]=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{bmatrix} \tag{6.59}$$

a tenzor mátrixa.

2. Ismét hangsúlyozzuk, hogy a három sorra vett esetben
   - három a tenzor működési pontján áthaladó és egymásra kölcsönösen merőleges egyenes,
   - egy egyenes és egy reá merőleges sík (közös pontjuk a tenzor működési pontja),
   - a teljes tér

alkotja a karakterisztikus teret. Jelölje $\mathcal{U}_\alpha$ a karakterisztikus tereket ($\alpha = 1{,}2$ vagy 3.) Ezzel a jelöléssel bármely $\mathbf{v}$ vektor felírható a

$$\mathbf{v} = \sum_{K=1}^{\alpha} \mathbf{v}_K \,, \qquad \mathbf{v}_K \in \mathcal{U}_K \tag{6.60}$$

alakban. A (6.60) egyenlet azt fejezi ki, hogy (a) $\alpha = 3$-ra bármely $\mathbf{v}$ vektor az egyszeres gyökökhöz tartozó sajátvektorok(kal párhuzamos vektorok) lineáris kombinációja, (b) $\alpha = 2$-re bármely $\mathbf{v}$ vektor az egyszeres gyökhöz tartozó főiránnyal párhuzamos és egy rá merőleges síkban fekvő vektor összegének tekinthető, (c) $\alpha = 1$-re bármely $\mathbf{v}$ vektor önmagában a háromdimenziós tér egy vektora.

6.2.4. A karakterisztikus polinom együtthatói, skalárinvariánsok. A karakterisztikus polinomot adó (6.44) és (6.41) összefüggések egybevetése alapján

λ^3-nek 1:

$$\frac{1}{3!}\, e_{klm} e^{pqr}\, \delta^k{}_p\, \delta^l{}_q\, \delta^m{}_r \,; \tag{6.61a}$$

λ^2-nek A_I:

$$A_I = \frac{1}{3!}\, e_{klm} e^{pqr}\, \left(a^k{}_p\, \delta^l{}_q\, \delta^m{}_r + \delta^k{}_p\, a^l{}_q\, \delta^m{}_r + \delta^k{}_p\, \delta^l{}_q\, a^m{}_r \right) \,; \tag{6.61b}$$

λ-nak A_{II}:

$$A_{II} = \frac{1}{3!}\, e_{klm} e^{pqr}\, \left(a^k{}_p\, a^l{}_q\, \delta^m{}_r + a^k{}_p\, \delta^l{}_q\, a^m{}_r + \delta^k{}_p\, a^l{}_q\, a^m{}_r \right) \,; \tag{6.61c}$$

végezetül pedig λ^0-nak A_{III}:

$$A_{III} = \frac{1}{3!}\, e_{klm} e^{pqr}\, a^k{}_p\, a^l{}_q\, a^m{}_r \tag{6.61d}$$

az együtthatója.

A továbbiakban egyszerűbb alakra hozzuk a kapott együtthatókat. Tovább alakítva az (1.30b) és a Kronecker delta indexátnevező tulajdonságának kihasználásával a (6.61a) képletet kapjuk, hogy λ^3-nek valóban

$$\frac{1}{3!} \underbrace{e_{klm} e^{klm}}_{3!} = 1$$

az együtthatója.

Amint arra az 56. oldalon már rámutattunk a további együtthatókat jelentő A_I, A_{II} és A_{III} skalárok a skalárinvariánsok. Az A_I-et adó (6.61b) képlet a Kronecker delta indexátnevező tulajdonságának kihasználásával, valamint az (1.30a) segítségével egyszerűsíthető:

$$A_I = \frac{1}{3!} \left(\overbrace{e_{klm} e^{plm}}^{2\delta_k{}^p}\, a^k{}_p + \overbrace{e_{klm} e^{kqm}}^{2\delta_l{}^q}\, a^l{}_q + \overbrace{e_{klm} e^{klr}}^{2\delta_m{}^r}\, a^m{}_r \right) = \frac{1}{3!}\, 2 \cdot 3\, a^k{}_k = a^k{}_k \,. \tag{6.62}$$

Az eredmény, összhangban a tenzor nyomával kapcsolatos a (6.29) összefüggéssel a $\boldsymbol{A}$ tenzor első skalárinvariánsa. Kiírva az összeget:

$$\boxed{A_I = a^1{}_1 + a^2{}_2 + a^3{}_3 \,.} \tag{6.63}$$

Vegyük észre, hogy a (6.61b) képlet szerint három determináns összege az A_I. Következésképp felírható az

$$A_I = \begin{vmatrix} a^1{}_1 & \delta^1{}_2 & \delta^1{}_3 \\ a^2{}_1 & \delta^2{}_2 & \delta^2{}_3 \\ a^3{}_1 & \delta^3{}_2 & \delta^3{}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta^1{}_1 & a^1{}_2 & \delta^1{}_3 \\ \delta^2{}_2 & a^2{}_2 & \delta^2{}_3 \\ \delta^3{}_3 & a^3{}_2 & \delta^3{}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta^1{}_1 & \delta^1{}_2 & a^1{}_3 \\ \delta^2{}_2 & \delta^2{}_2 & a^2{}_3 \\ \delta^3{}_3 & \delta^3{}_2 & a^3{}_3 \end{vmatrix} \tag{6.64}$$

alakban is.

Az A_{II} skalárinvariáns az A_I átalakításának lépéseivel és az adjungáltat értelmező (3.4a) összefüggés értelemszerű felhasználásával hozható megfelelő alakra:

$$A_{II} = \frac{1}{3!}\left(e_{klm}e^{pqm}\, a^k{}_p\, a^l{}_q + e_{klm}e^{plr}\, a^k{}_p\, a^m{}_r + e_{klm}e^{kqr}\, a^l{}_q\, a^m{}_r\right) = \tag{6.65}$$

$$= \frac{1}{2}\, e^{pqm}e_{klm}\, a^k{}_p\, a^l{}_q = \underset{(3.4a)}{\Uparrow} = A^k{}_k\,.$$

Részletesen kiírva

$$\boxed{A_{II} = \begin{vmatrix} a^1{}_1 & a^1{}_2 \\ a^2{}_1 & a^2{}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a^1{}_1 & a^1{}_3 \\ a^3{}_1 & a^3{}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a^2{}_2 & a^2{}_3 \\ a^3{}_2 & a^3{}_3 \end{vmatrix}} \tag{6.66}$$

(ez a

$$\begin{bmatrix} a^1{}_1 & a^1{}_2 & a^1{}_3 \\ a^2{}_2 & a^2{}_2 & a^2{}_3 \\ a^3{}_3 & a^3{}_2 & a^3{}_3 \end{bmatrix}$$

mátrix főátlójához tartozó aldeterminánsok összege), vagy a (6.61c) képlet alapján a (6.64) összefüggéshez hasonló alakban:

$$A_{II} = \begin{vmatrix} a^1{}_1 & a^1{}_2 & \delta^1{}_3 \\ a^2{}_1 & a^2{}_2 & \delta^2{}_3 \\ a^3{}_1 & a^3{}_2 & \delta^3{}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a^1{}_1 & \delta^1{}_2 & a^1{}_3 \\ a^2{}_2 & \delta^2{}_2 & a^2{}_3 \\ a^3{}_3 & \delta^3{}_2 & a^3{}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta^1{}_1 & a^1{}_2 & a^1{}_3 \\ \delta^2{}_2 & a^2{}_2 & a^2{}_3 \\ \delta^3{}_3 & a^3{}_2 & a^3{}_3 \end{vmatrix}\,. \tag{6.67}$$

A (6.61d) képlet szerint az A_{III} skalárinvariáns az $a^k{}_l$ determinánsa:

$$\boxed{A_{III} = \begin{vmatrix} a^1{}_1 & a^1{}_2 & a^1{}_3 \\ a^2{}_2 & a^2{}_2 & a^2{}_3 \\ a^3{}_3 & a^3{}_2 & a^3{}_3 \end{vmatrix}\,.} \tag{6.68}$$

A főtengelyek KR-ében a (6.63), (6.66), (6.68) és (6.59) összefüggések figyelembe vételével

$$A_{III} = \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\,, \qquad A_{II} = \lambda_1\,\lambda_2+\lambda_2\,\lambda_3+\lambda_3\,\lambda_1\,, \qquad A_{III} = \lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3 \tag{6.69}$$

az invariánsok értéke.

Az A_{II}-t adó (6.65) képlet további, az (1.29) felhasználásán nyugvó átalakításával az

$$A_{II} = \frac{1}{2}\, e^{pqm}e_{klm}\, a^k{}_p\, a^l{}_q = \frac{1}{2}\,\left(\delta_k{}^p\delta_l{}^q - \delta_k{}^q\delta_l{}^p\right)\, a^k{}_p\, a^l{}_q = \frac{1}{2}\,\left(\underbrace{a^k{}_k\, a^l{}_l}_{A_I^2} - a^k{}_p\, a^p{}_k\right)$$

vagyis az

$$\boxed{A_{II} = \frac{1}{2}\,\left(A_I^2 - a^k{}_p\, a^p{}_k\right)} \tag{6.70}$$

összefüggést kapjuk az invariánsok között. Visszaidézve a másodrendű tenzor nyomának (6.28) alatti értelmezését és a számítására szolgáló (6.29) képletet következik, hogy

$$A_I = \operatorname{tr}\boldsymbol{A} \qquad \text{és} \qquad a^k{}_p\, a^p{}_k = \operatorname{tr}\left(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}\right),$$

amivel

$$\boxed{A_{II} = \frac{1}{2}\,\left[(\operatorname{tr}\boldsymbol{A})^2 - \operatorname{tr}\,\left(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}\right)\right]} \tag{6.71}$$

a (6.70) képlet szimbolikus formában írt alakja.

6.3. Hatványozás, tenzorpolinomok, deviátortenzor

6.3.1. Másodrendű tenzorok egész kitevős hatványai. Gyökvonás. Az $\boldsymbol{A}$ másodrendű tenzor n-ik hatványán az

$$\boldsymbol{A}^n = \underset{1}{\boldsymbol{A}} \cdot \underset{2}{\boldsymbol{A}} \cdot \underset{3}{\boldsymbol{A}} \cdot \cdots \cdot \underset{n}{\boldsymbol{A}} \qquad n \geq 2 \tag{6.72a}$$

kifejezést értjük. Indexes jelölésmódban

$$(a^n)^k{}_l = \underset{1}{a}{}^k{}_m \, \underset{2}{a}{}^m{}_r \, \underset{3}{a}{}^r{}_p \, \cdots \, \underset{n}{a}{}^s{}_l \, . \tag{6.72b}$$

A hatványozás fenti értelmezése érvényes bármilyen másodrendű tenzorra.

Legyen a $\boldsymbol{C}$ másodrendű tenzor szimmetrikus és pozitív definit. Ez esetben létezik egy és csakis egy pozitív definit szimmetrikus $\boldsymbol{U}$ tenzor, amelyre nézve fennáll, hogy

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{U}^2 = \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{U} \, . \tag{6.73}$$

Következésképp formálisan írható, hogy

$$\boldsymbol{U} = \sqrt{\boldsymbol{C}} \, .$$

Legyen

$$\boldsymbol{C} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \, \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i$$

a $\boldsymbol{C}$ tenzor spektrális felbontása és definiáljuk az $\boldsymbol{U}$-t az

$$\boldsymbol{U} = \sum_{i=1}^{3} \sqrt{\lambda_i} \, \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \tag{6.74}$$

módon. Könnyű meggyőződni róla, hogy a fenti $\boldsymbol{U}$ teljesíti a (6.73) egyenletet, és arról is, hogy pozitív definit az $\boldsymbol{U}$.

Tegyük fel, hogy két megoldás létezik azaz

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{U}^2 = \boldsymbol{V}^2 \, , \qquad \boldsymbol{U} \neq \boldsymbol{V} \, .$$

Legyen $\mathbf{n}$ sajátvektor és jelölje λ a vonatkozó sajátértéket (e kettős egyike az összetartozó $\mathbf{n}_i$ és λ_i-nek). Ekkor

$$\mathbf{0} = (\boldsymbol{C} - \lambda \boldsymbol{I}) \cdot \mathbf{n} = (\boldsymbol{U}^2 - \lambda \boldsymbol{I}) \cdot \mathbf{n} = (\boldsymbol{U} + \sqrt{\lambda}\boldsymbol{I}) \cdot (\boldsymbol{U} - \sqrt{\lambda}\boldsymbol{I}) \cdot \mathbf{n} \, .$$

Legyen

$$\mathbf{v} = (\boldsymbol{U} - \sqrt{\lambda}\boldsymbol{I}) \cdot \mathbf{n} \, .$$

Ezzel

$$(\boldsymbol{U} + \sqrt{\lambda}\boldsymbol{I}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0} \, ,$$

azaz

$$\boldsymbol{U} \cdot \mathbf{v} = -\sqrt{\lambda}\mathbf{v} \, ,$$

ahonnan az következik, hogy a $\mathbf{v}$-nek el kell tűnnie, mivel pozitív definit az $\boldsymbol{U}$ és $\lambda > 0$. Ennélfogva fennáll tehát, hogy

$$\boldsymbol{U} \cdot \mathbf{n} = \sqrt{\lambda}\mathbf{n} \, .$$

Hasonló gondolatmenettel kimutatható, hogy

$$\boldsymbol{V} \cdot \mathbf{n} = \sqrt{\lambda}\mathbf{n} \, ,$$

vagyis

$$\boldsymbol{U} \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{V} \cdot \mathbf{n}$$

$\boldsymbol{C}$ minden sajátvektorára. Mivel az $\mathbf{n}$ sajátvektorok bázist alkotnak innen a

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{V} \, .$$

egyenlet következik.

Általánosítás:

– A főtengelyek KR-ében

$$\boldsymbol{C}^2 = \sum_{i=1}^{3} (\lambda_i)^2 \ \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \,, \tag{6.75a}$$

$$\cdots$$

$$\boldsymbol{C}^n = \sum_{i=1}^{3} (\lambda_i)^2 \ \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \,, \tag{6.75b}$$

illetve

$$\left[(c^n)^{\,k}{}_l \right] = \begin{bmatrix} (\lambda_1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda_2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda_3)^n \end{bmatrix} ,$$

ahol az n pozitív, negatív és tört is lehet, ha $\lambda_i \geq 0\,,\ i = 1,2,3$

6.3.2. A Cayley-Hamilton tétel. Megmutatjuk alábbiakban, hogy bármely $\boldsymbol{A}$ másodrendű tenzor kielégíti az

$$\boxed{\boldsymbol{A}^3 - A_I\,\boldsymbol{A}^2 + A_{II}\,\boldsymbol{A} - A_{III}\boldsymbol{I} = \boldsymbol{0}} \tag{6.76}$$

egyenletet.

Tekintsük az $\boldsymbol{A} - \alpha\boldsymbol{I}$ különbséget, ahol tetszőleges skalár az α. Jelölje $\boldsymbol{H}$ az $\boldsymbol{A} - \alpha\boldsymbol{I}$ tenzor adjungáltját. Visszaidézve a (3.7) képletet, majd szimbolikus jelölésre térve át a képlet alkalmazása során, írhatjuk, hogy

$$\boldsymbol{H} \cdot (\boldsymbol{A} - \alpha\boldsymbol{I}) = |\boldsymbol{A} - \alpha\boldsymbol{I}|\boldsymbol{I} \,.$$

A jobboldalon álló determináns a (6.44) és (6.45) alapján helyettesíthető:

$$\boldsymbol{H} \cdot (\alpha\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \underline{\left(\alpha^3 - A_I\,\alpha^2 + A_{II}\,\alpha - A_{III}\right)\boldsymbol{I}} \,.$$

Azt sugallja az utóbbi képlet jobboldala, hogy a baloldalon álló $\boldsymbol{H}$ az α kvadratikus polinomja, azaz

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B}\alpha^2 + \boldsymbol{C}\alpha + \boldsymbol{G} \,.$$

Itt a $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ és $\boldsymbol{G}$ egyelőre ismeretlen tenzorok. Kihasználva $\boldsymbol{H}$ fenti polinomiális előállítását kapjuk, hogy

$$\boldsymbol{H} \cdot (\alpha\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \underline{\boldsymbol{B}\alpha^3 - (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} - \boldsymbol{C})\,\alpha^2 + (\boldsymbol{G} - \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{A})\,\alpha - \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{A}}$$

Az aláhúzott képletrészek csak akkor lehetnek egyenlőek egymással, ha

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I} \,, \qquad \boldsymbol{A} - \boldsymbol{C} = A_I\boldsymbol{I} \,,$$
$$\boldsymbol{G} - \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{A} = A_{II}\boldsymbol{I} \,, \qquad \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{A} = A_{III}\boldsymbol{I} \,.$$

A fenti képletek felhasználásával a (6.76) baloldala tekintetében az

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}^3 - A_I\,\boldsymbol{A}^2 + A_{II}\,\boldsymbol{A} - A_{III}\boldsymbol{I} &= \boldsymbol{A}^3 - A_I\,\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{A}^2 + A_{II}\,\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{A} - A_{III}\boldsymbol{I} = \\ &= \boldsymbol{A}^3 - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{C}) \cdot \boldsymbol{A}^2 + (\boldsymbol{G} - \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{A} - A_{III}\boldsymbol{I} \equiv \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

eredmény adódik. Ezt kellett igazolni.

A Cayley-Hamilton tétel azt mondja ki, hogy *minden másodrendű tenzor kielégíti saját karakterisztikus egyenletét.*

További összefüggés állapítható meg a skalárinvariánsok között, ha vesszük a Cayley-Hamilton tétel baloldalának nyomát és kifejezzük a kapott egyenletből a harmadik skalárinvariánst:

$$A_{III} = \frac{1}{3}\left[-A_I \operatorname{tr} \boldsymbol{A}^2 + A_I A_{II} + \operatorname{tr} \boldsymbol{A}^3\right]$$

Itt a (6.71) alapján

$$\operatorname{tr}\boldsymbol{A}^2 = A_I^2 - 2A_{II} \, .$$

Következőleg

$$\boxed{A_{III} = \frac{1}{3}\left[-A_I^3 + 3A_I A_{II} + a^k{}_p \, a^p{}_q \, a^q{}_k\right] \, .} \tag{6.77}$$

6.3.3. Tenzorpolinomok. Legyen az $\boldsymbol{A}$ tenzor szimmetrikus. Nyilvánvaló ekkor, hogy az $\boldsymbol{A}$ tenzor

$$\boldsymbol{A}^s \, , \qquad\qquad s = 2,3,4,\ldots$$

hatványai is szimmetrikus tenzorok.

Tekintsük a

$$\boldsymbol{H} = \sum_s^n \alpha_s \boldsymbol{A}^s \, , \qquad\qquad n \geq 3 \tag{6.78a}$$

tenzorpolinomot, ahol valós számok az α_s együtthatók.

A (6.76) Cayley-Hamilton tétel szerint fennáll az

$$\boldsymbol{A}^3 = A_I \, \boldsymbol{A}^2 - A_{II} \, \boldsymbol{A} + A_{III} \boldsymbol{I}$$

egyenlet. Az $\boldsymbol{A}$ -val történő átszorzással innen az

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}^4 = A_I \, \boldsymbol{A}^3 - A_{II} \, \boldsymbol{A}^2 + A_{III} \boldsymbol{A} = \\ = A_I \, \left(A_I \, \boldsymbol{A}^2 - A_{II} \, \boldsymbol{A} + A_{III} \boldsymbol{I}\right) - A_{II} \, \boldsymbol{A}^2 + A_{III} \boldsymbol{A} = \\ = (A_I - A_{II}) \, \boldsymbol{A}^2 + (A_{III} - A_{II}) \, \boldsymbol{A} + A_I A_{II} \boldsymbol{I} \end{aligned}$$

eredmény következik. A bemutatott átalakítás értelemszerű és ismételt alkalmazásával megmutatható, hogy

$$\boldsymbol{H} = \beta_2 \boldsymbol{A}^2 + \beta_1 \boldsymbol{A} + \beta_o \boldsymbol{I} \, , \tag{6.78b}$$

ahol β_o, β_1 és β_2 valós számok. Ez azt jelenti, hogy bármely szimmetrikus tenzorpolinom kifejezhető a tenzor $\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{A}^1 = \boldsymbol{A}$ és $\boldsymbol{A}^2$ hatványai segítségével.

6.3.4. Azonos karakterisztikus terű tenzorok. Legyen az $\boldsymbol{S}$ és a $\boldsymbol{T}$ másodrendű tenzor. Tegyük fel, hogy szimmetrikus az $\boldsymbol{S}$ tenzor. Tegyük fel továbbá, hogy felcserélhető a két tenzor skalárszorzatában a tényezők sorrendje:

$$\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{T} = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{S} \, .$$

Ekkor a $\boldsymbol{T}$ tenzor nem változtatja meg (változatlanul hagyja) az $\boldsymbol{S}$ tenzor karakterisztikus tereit. Az utóbbi állításon a következőket értjük: Tegyük fel, hogy a $\mathbf{v}$ vektor az $\boldsymbol{S}$ tenzor valamelyik karakterisztikus teréhez tartozik, következésképp, hogy fennáll a $\boldsymbol{S} \cdot \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$ egyenlet, ahol λ a vonatkozó sajátérték. Ekkor a $\boldsymbol{T} \cdot \mathbf{v}$ vektor is az $\boldsymbol{S}$ tenzor ugyanezen karakterisztikus teréhez tartozik.

Az állítás formális igazolását a skalárszorzatban álló tényezők felcserélhetőségének figyelembevételével kapjuk:

$$\boxed{\boldsymbol{S} \cdot (\boldsymbol{T} \cdot \mathbf{v})} = \boldsymbol{T} \cdot (\boldsymbol{S} \cdot \mathbf{v}) = \boxed{\lambda (\boldsymbol{T} \cdot \mathbf{v})} \, ,$$

hiszen a keretezett képletrészek egyenlősége az jelenti, tekintettel a $\boldsymbol{S}\cdot\mathbf{v}=\lambda\mathbf{v}$ egyenletre, hogy $\mathbf{v}$ és $\boldsymbol{T}\cdot\mathbf{v}$ az $\boldsymbol{S}$ ugyanazon a karakterisztikus térhez tartozik.

Igaz az állítás megfordítása is. Eszerint, ha változatlanul hagyja a $\boldsymbol{T}$ tenzor az $\boldsymbol{S}$ tenzor karakterisztikus tereit (terét), akkor kommutatív művelet a két tenzor skaláris szorzata.

Tegyük fel, hogy összhangban a (6.60) összefüggéssel a $\mathbf{v}$ vektort a

$$\mathbf{v}=\sum_{K=1}^{\alpha}\mathbf{v}_K\,,\qquad\qquad \mathbf{v}_K\in\mathcal{U}_K$$

módon bontjuk fel, ahol az $\mathcal{U}_K$, $K\in[1,\alpha]$, (α a karakterisztikus terek száma) az $\boldsymbol{S}$ karakterisztikus tere. Mivel azt változatlanul hagyja a $\boldsymbol{T}$ tenzor fennáll, hogy

$$\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{T}\cdot\mathbf{v}_K)=\lambda_K(\boldsymbol{T}\cdot\mathbf{v}_K)=\boldsymbol{T}\cdot(\lambda_K\mathbf{v}_K)=\boldsymbol{T}\cdot(\boldsymbol{S}\cdot\mathbf{v}_K)\,,\qquad K\in[1,\alpha]\,.$$

Ha összeadjuk a fenti egyenleteket, akkor kapjuk, hogy

$$\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\mathbf{v}=\sum_{K=1}^{\alpha}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\mathbf{v}_K=\sum_{K=1}^{\alpha}\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{S}\cdot\mathbf{v}_K=\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{S}\cdot\mathbf{v}\,.$$

Mivel a $\mathbf{v}$ tetszőleges $\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{S}$. Ezt akartuk igazolni.

Megjegyzések:

1. Ismét hangsúlyozni kívánjuk, hogy nem szükségképpen szimmetrikus a $\boldsymbol{T}$ tenzor.
2. Tegyük fel, hogy három az $\boldsymbol{S}$ karakterisztikus tereinek száma. Tegyük fel továbbá, hogy a $\boldsymbol{T}$ tenzor is szimmetrikus. Ha felcserélhető a (6.3.4) szorzat, akkor azonnal következik a fentiekből, hogy megegyeznek a $\boldsymbol{T}$ tenzor karakterisztikus terei az $\boldsymbol{S}$ tenzor karakterisztikus tereivel. Másként fogalmazva azonosak a két tenzor főirányai. Az ilyen tenzorokat *közös főtengelyű, vagy koaxiális tenzoroknak nevezzük.*

6.3.5. Deviátortenzor és gömbi tenzor. Legyen szimmetrikus az $\boldsymbol{A}$ tenzor. Az

$$\boldsymbol{A}_d=\boldsymbol{A}-\frac{A_I}{3}\boldsymbol{I}\qquad\qquad (6.79)$$

$$\boxed{(a_d)^{\,k}{}_l=a^{\,k}{}_l-\frac{A_I}{3}\,\delta^{\,k}{}_l}$$

egyenlet az $\boldsymbol{A}$ tenzor deviátorát (az $\boldsymbol{A}$ -hoz tartozó deviátortenzort) értelmezi.

A deviátor szimmetrikus tenzor.

Az $\boldsymbol{A}$ és $\boldsymbol{A}_d$ szimmetrikus tenzorok koaxiálisak, hiszen felcserélhető a szorzatuk:

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}_d=\boldsymbol{A}_d\cdot\boldsymbol{A}\,.$$

Az első skalárinvariánst adó (6.63) képlet alapján

$$(A_d)_I=0\,.\qquad\qquad (6.80)$$

Ennek figyelembevételével kapjuk a (6.71) összefüggésből, hogy

$$(A_d)_{II}=-\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,(\boldsymbol{A}_d\cdot\boldsymbol{A}_d)=-\frac{1}{2}\,(a_d)^{\,k}{}_l\,(a_d)^{\,l}{}_k=-\frac{1}{2}\left(a^{\,k}{}_l-\frac{A_I}{3}\,\delta^{\,k}{}_l\right)\left(a^{\,l}{}_{kl}-\frac{A_I}{3}\,\delta^{\,l}{}_k\right)$$

azaz, hogy

$$(A_d)_{II}=-\frac{1}{2}\left(a^{\,k}{}_l\,a^{\,l}{}_k-\frac{A_I^2}{3}\right)\,.$$

Az összegek kiírásával és A_I helyettesítésével tovább alakítható az utóbbi képlet:

$$(A_d)_{II} = -\frac{1}{6}\left(3a^{k}{}_{l}\,a^{l}{}_{k} - A_I^2\right) =$$
$$= -\frac{1}{6}\left[3\left((a^1{}_1)^2+(a^2{}_2)^2+(a^3{}_3)^2\right)+6(a^1{}_2\,a^2{}_1+a^2{}_3\,a^3{}_2+a^3{}_1\,a^1{}_3)-\right.$$
$$\left.-(a^1{}_1+a^2{}_2+a^3{}_3)^2\right] .$$

Innen azonnal adódik a deviátortenzor második invariánsának végső alakja:

$$(A_d)_{II} = -\frac{1}{6}\left[(a^1{}_1-a^2{}_2)^2+(a^2{}_2-a^3{}_3)^2+(a^3{}_3-a^1{}_1)^2+\right.$$
$$\left.+\,6\,(a^1{}_2\,a^2{}_1+a^2{}_3\,a^3{}_2+a^3{}_1\,a^1{}_3)\right] . \tag{6.81}$$

A főtengelyek KR-ében zérus értékűek a főátlón kívül álló elemek. Következésképp

$$(A_d)_{II} < 0\,.$$

Visszaidézve a deviátor (6.79) alatti értelmezését azonnal adódik az $\boldsymbol{A}$ tenzor

$$\boxed{\begin{array}{c}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_d + \boldsymbol{A}_s \\ \boldsymbol{A}_d = \boldsymbol{A} - \dfrac{A_I}{3}\boldsymbol{I} \qquad \boldsymbol{A}_s = \dfrac{A_I}{3}\boldsymbol{I}\end{array}} \tag{6.82}$$

deviátoros és gömbi részekre történő felbontása, ahol az $\boldsymbol{A}_s$ tenzor az $\boldsymbol{A}$ tenzor gömbi (szférikus) része, röviden gömbi tenzor.

Gyakorlatok

1. Igazolja az $\boldsymbol{A}$ tenzor $(6.2a)_{1,3,4}$ alatti alakjaira is, hogy a transzponálás művelete a bázistenzort alkotó diádok szorzási sorrendjének cseréje.
2. Mutassa meg, hogy az a_{kl}, $a_k{}^l$ és a^{kl} tenzorok transzponáltja a (6.6b) képlet szerint számítható.
3. Legyen valódi tenzor a d_{qr}. Mutassa meg, hogy ez esetben valódi vektor a
$$d^{(a)\,s} = -\frac{1}{2}\,\varepsilon^{qrs}\,d_{qr}$$
vektorinvariáns.
4. Ellenőrizze, hogy helyes-e az s_{pq} ferdeszimmetrikus tenzor $s^{(a)r}$ vektorinvariánssal történő (6.27b) alatti előállítása.
5. Mutassa meg, hogy valódi skalár a $\boldsymbol{D}$ tenzor $d_k{}^k$ nyoma (első skalárinvariánsa).
6. Ellenőrizze a vonatkozó definíció felhasználásával a (6.30a) és (6.30b) képletek helyességét.
7. Ellenőrizze a (6.30c) és (6.30d) képletek helyességét is.
8. Legyen az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ tetszőleges két vektor. Igazolja a vektorokkal kapcsolatos
$$|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| \le |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$$
Schwartz-féle egyenlőtlenséget.
9. Legyen a $\boldsymbol{D}$ és $\boldsymbol{S}$ tetszőleges másodrendű tenzor. Igazolja hogy a $\boldsymbol{D}\cdot\cdot\boldsymbol{S}$ szorzat eleget tesz a (6.34) Schwartz-féle egyenlőtlenségnek.
10. Mutassa meg a (6.37a) képletre vezető gondolatmenet ismétlésével, hogy az $a_m{}^r$ tenzornak
$$\left(a^{-1}\right)_l{}^m = \frac{1}{2!\;|a_s{}^j|}\,e_{ljk}e^{mst}\,a_s{}^j\,a_t{}^k\,.$$
az inverze.

11. Írja fel az előző gyakorlat alapján az $a^m{}_r$ tenzor inverzének képletét.
12. Igazolja, a főtengelyek KR-ben végezve a számításokat, a Cayley-Hamilton tételt.
13. Legyen inverálható az $\boldsymbol{A}$ tenzor. Igazolja, hogy
$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{A_{III}} \left(\boldsymbol{A}^2 - A_I \boldsymbol{A} + A_{II} \boldsymbol{I} \right)$$
a tenzor inverze.
14. Mutassa meg, hogy szimmetrikus tenzor a szimmetrikus $\boldsymbol{A}$ tenzor s-ik $s=2,3,4,\ldots$ hatványa.
15. Legyenek valamely (x) görbevonalú KR egy $\underline{\mathrm{P}}$ pontjában
$$\mathbf{g}_1 = \mathbf{i}_1 \,, \qquad \mathbf{g}_2 = \frac{\mathbf{i}_2}{2} \,, \qquad \mathbf{g}_3 = \mathbf{i}_3 \,,$$
$$\mathbf{g}^1 = \mathbf{i}^1 \,, \qquad \mathbf{g}^2 = 2\mathbf{i}^2 \,, \qquad \mathbf{g}^3 = \mathbf{i}^3$$
a kovariáns és kontravariáns bázisvektorok az (y) kartéziuszi KR bázisvektoraival felírva – lásd a 4.2.a. ábrát. Ezek birtokában
$$[g_{mn}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad \left[g^{kl}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
a két metrikus tenzor és
$$\left[\tau_n{}^l\right] = \left[\mathbf{g}_n \cdot \mathbf{i}^l\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad \left[t_l{}^k\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
a két transzformációs tenzor. Adott a $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{F}^{\boldsymbol{T}}$ tenzor vegyesindexes alakjának mátrixa a görbevonalú KR tekintett pontjában:
$$\left[B^p{}_q\right] = \begin{bmatrix} 104 & 30 & 0 \\ 120 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 48 \end{bmatrix}$$
Ellenőrizze, hogy szimmetrikus-e a $\boldsymbol{B}$ tenzor majd számítsa ki a tenzor sajátértékeit, sajátvektorait, illetve ha pozitív definit akkor a $\boldsymbol{B}$ tenzor $\boldsymbol{V}$ négyzetgyökét is.

7. FEJEZET

Speciális tenzorok

7.1. Ortogonális tenzorok

7.1.1. Az ortogonális tenzor fogalma. Legyen a $\boldsymbol{Q}=Q^k_{\ p}\mathbf{g}_k\otimes\mathbf{g}^p$ másodrendű tenzor invertálható, azaz

$$\det(Q^k_{\ p})\neq 0\,.$$

Azt fogjuk mondani, hogy a $\boldsymbol{Q}$ tenzor ortogonális, ha a

$$\mathbf{p}=\boldsymbol{Q}\cdot\mathbf{v} \tag{7.1}$$

és

$$\mathbf{s}=\boldsymbol{Q}\cdot\mathbf{w} \tag{7.2}$$

leképezésekre nézve – itt $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ tetszőleges tárgyvektor, $\mathbf{p}$ és $\mathbf{s}$ a vonatkozó képvektor – fennáll a

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{s}=(\boldsymbol{Q}\cdot\mathbf{v})\cdot(\boldsymbol{Q}\cdot\mathbf{w})=\left(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{Q}^T\right)\cdot(\boldsymbol{Q}\cdot\mathbf{w})=\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} \tag{7.3}$$

reláció. Az $\boldsymbol{I}$ metrikus tenzor (egységtenzor) felhasználásával kapjuk innét, hogy

$$\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{Q}^T\cdot\boldsymbol{Q}\cdot\mathbf{w}-\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{I}\cdot\mathbf{w}=\mathbf{v}\cdot\left(\boldsymbol{Q}^T\cdot\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{I}\right)\cdot\mathbf{w}=0$$

ahonnan azonnal következik, tekintettel $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ tetszőlegességére, hogy a

$$\boldsymbol{Q}^T\cdot\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{I} \tag{7.4}$$

összefüggés teljesülése az ortogonalitás szükséges feltétele. A (7.4) feltétel ugyanakkor elégséges is, hiszen fennállása esetén

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{s}=(\boldsymbol{Q}\cdot\mathbf{v})\cdot(\boldsymbol{Q}\cdot\mathbf{w})=\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{Q}^T\cdot\boldsymbol{Q}\cdot\mathbf{w}=\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}\,.$$

A (7.4) feltétel következménye, hogy

$$\boldsymbol{Q}^T=\boldsymbol{Q}^{-1}\,. \tag{7.5}$$

Szavakban: az ortogonális $\boldsymbol{Q}$ tenzor transzponáltja megegyezik a tenzor inverzével.

7.1.2. Az ortogonális tenzorhoz tartozó leképezés. Továbbiakban a $\boldsymbol{Q}$ tenzorhoz tartozó leképezés geometriai tulajdonságait vizsgáljuk. A (7.3) egyenlet szerint a $\mathbf{p}$ és $\mathbf{s}$ képvektorok, valamint a $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ tárgyvektorok között fennáll a

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{s}=\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} \tag{7.6}$$

összefüggés. Mivel a $\mathbf{w}$ tetszőleges, a $\mathbf{w}=\mathbf{v}$ választás is lehetséges. Ez esetben $\mathbf{p}$-t kell a baloldalon $\mathbf{s}$ helyére írni:

$$\mathbf{p}^2=\mathbf{v}^2\,.$$

Az utóbbi egyenlet azt fejezi ki, hogy azonos a képvektor és a tárgyvektor hossza, azaz *távolságtartó* a leképezés.

Jelölje rendre φ és ϑ a $\mathbf{p}$ és $\mathbf{s}$, valamint a $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ vektorok által bezárt szöget – $\varphi,\vartheta\in[0,\pi]$. A skaláris szorzás értelmezése alapján az

$$|\mathbf{p}|\,|\mathbf{s}|\cos\varphi=|\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}|\cos\vartheta$$

egyenlet következik a a (7.6) képletből. Ugyanakkor a leképezés távolságtartó volta miatt

$$|\mathbf{p}| = |\mathbf{v}| \quad \text{és} \quad |\mathbf{s}| = |\mathbf{w}|$$

azaz

$$\cos\varphi = \cos\vartheta$$

végső soron pedig

$$\varphi = \vartheta \tag{7.7}$$

ami azt jelenti, hogy a leképezés nemcsak távolságtartó, hanem *szögtartó* is.

Tekintsük a $\boldsymbol{Q}^T \cdot \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{Q}^T = \boldsymbol{I}$ szorzat determinánsát. A determinánsok szorzástételét kihasználva írható, hogy

$$\det\left(\boldsymbol{Q}^T \cdot \boldsymbol{Q}\right) = \det\left(\boldsymbol{Q}\right) \det\left(\boldsymbol{Q}^T\right) = \left[\det\left(\boldsymbol{Q}\right)\right]^2 = \det\left(\boldsymbol{I}\right) .$$

Innen következik, hogy a $\boldsymbol{Q}$ tenzor vegyes indexes alakjára nézve – ekkor ui. az $\boldsymbol{I}$ metrikus tenzor mátrixa a Kronecker szimbólum mátrixa –

$$\det\left(Q^k{}_p\right) = \pm 1 . \tag{7.8}$$

Megjegyezzük, hogy a determinánsok szorzástételéből az is következik, hogy

$$\det\left(Q^{km}\right) = \det\left(Q^k{}_s g^{sm}\right) = \det\left(Q^k{}_s\right) \frac{1}{g_o} \tag{7.9}$$

ahol $g_o = \det\left(g_{rs}\right)$.

A (7.8) képlet szerint a $\boldsymbol{Q}$ tenzor vegyes indexes alakjának $+1$, vagy -1 a determinánsa. Alábbiak az előjelek leképezésre gyakorolt hatását vizsgálják, utat nyitva ezzel a leképezés geometriai képének teljessé tételéhez. Az [alsó indexes] {felső indexes} alakot tekintve

$$q^{(a)\,k} = -\frac{1}{2}\varepsilon^{kml} Q_{ml} \quad \text{illetve} \quad q^{(a)}_p = -\frac{1}{2}\varepsilon_{prs} Q^{rs} \tag{7.10}$$

a $\boldsymbol{Q}$ tenzor vektorinvariánsa.

Megmutatjuk, hogy

$$\boldsymbol{Q} \cdot \mathbf{q}^{(a)} = \pm \mathbf{q}^{(a)} \tag{7.11}$$

ahol az előjel pozitív, ha $\det\left(Q^k{}_s\right) = 1$ és negatív, ha $\det\left(Q^k{}_s\right) = -1$. Az átalakítások során indexes jelölést alkalmazunk, és fel fogjuk használni a (7.4) és (7.5) alapján írható

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{Q}^{-1} \cdot \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^T \cdot \boldsymbol{Q} \tag{7.12}$$

vagy ami ugyanaz a

$$\delta^r_l = \overset{-1}{Q}{}^{rm} Q_{ml} = Q^{mr} Q_{ml}$$

összefüggést. A lépések nagy száma miatt törekszünk az átalakítások részletes leírására. A vektorinvariánst adó $(7.10)_2$ képlet felhasználásával a (7.11) egyenletből

$$Q^{kp} q^{(a)}_p = Q^{kp} \left\{ -\frac{1}{2}\varepsilon_{prs} Q^{rs} \right\} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{prs} Q^{kp} Q^{ls} \underbrace{\delta^r_l}_{Q^{mr} Q_{ml}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{g_o} \underbrace{e_{prs} Q^{kp} Q^{mr} Q^{ls}}_{\det(Q^{kl}) e^{kml}} Q_{ml} = -\frac{1}{2} g_o \frac{1}{\sqrt{g_o}} e^{kml} \det(Q^{kl}) Q_{ml}$$

következik. A (7.9) képlet helyettesítése és a (7.8) összefüggés kihasználása után – tekintettel a $(7.10)_1$ egyenletre is – a bizonyítani kívánt eredményt kapjuk:

$$Q^{kp}q_p^{(a)} = -\frac{1}{2}g_o\frac{1}{\sqrt{g_o}}e^{kml}\det\left(Q^k{}_s g^{sm}\right)Q_{ml} =$$
$$= \det\left(Q^k{}_s\right)\left\{-\frac{1}{2}\varepsilon^{kml}Q_{ml}\right\} = \pm q^{(a)k}$$

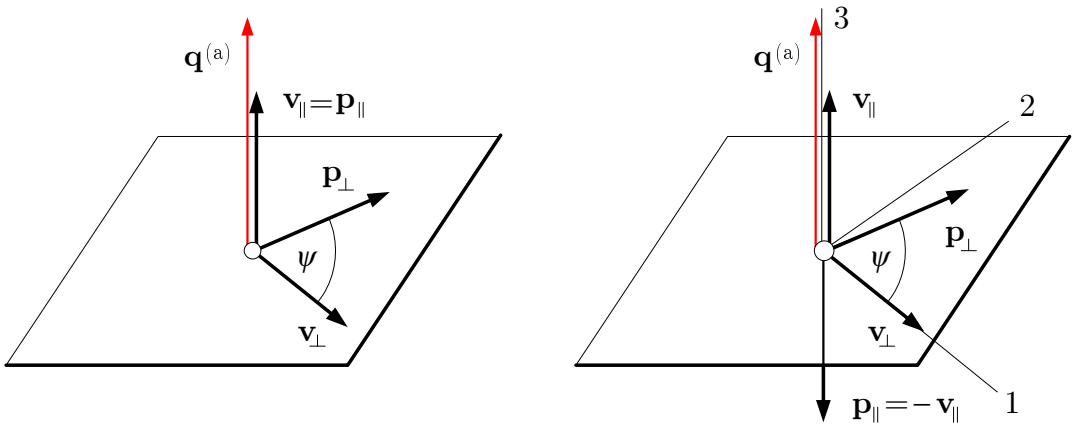
A most igazolt (7.11) összefüggésből a $\boldsymbol{Q}^T$-vel történő átszorzással és a (7.12) képlet kihasználásával és a két oldal felcserélésével a

$$\boldsymbol{Q}^T\cdot\mathbf{q}^{(a)} = \pm\mathbf{q}^{(a)}\,,$$

vagy ami ugyanaz a

$$\mathbf{q}^{(a)}\cdot\boldsymbol{Q} = \pm\mathbf{q}^{(a)} \tag{7.13}$$

alakok következnek.



7.1. ábra.

(a) Forgatás (b) Forgatás és tükrözés

A (7.11) és (7.13) képletek segítségével teljes egészében tisztázni tudjuk a leképezés geometriai jellegét. Tekintsük a $\mathbf{v}$ tárgyvektor $\mathbf{q}^{(a)}$-val párhuzamos és arra merőleges összetevőkre történő felbontását:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{||} + \mathbf{v}_\perp$$
$$\mathbf{v}_{||}\times\mathbf{q}^{(a)} = 0 \qquad \mathbf{v}_\perp\cdot\mathbf{q}^{(a)} = 0\,,$$

majd vizsgáljuk meg, részletesebben a

$$\mathbf{p} = \boldsymbol{Q}\cdot\mathbf{v} = \boldsymbol{Q}\cdot\mathbf{v}_{||} + \boldsymbol{Q}\cdot\mathbf{v}_\perp$$

leképezést.

Mivel a $\mathbf{v}_{||}$ párhuzamos a $\mathbf{q}^{(a)}$-val, és mivel a leképezés távolságtartó a $\mathbf{v}_{||}$ képe

$\mathbf{p}_{||} = \mathbf{v}_{||}$ azaz önmaga, ha $\det\left(Q^k{}_s\right) = +1$

$\mathbf{p}_{||} = -\mathbf{v}_{||}$ azaz önmaga tükörképe, ha $\det\left(Q^k{}_s\right) = -1$

A $\mathbf{q}^{(a)}$-ra merőleges $\mathbf{v}_\perp$ összetevő képe, azaz $\mathbf{p}_\perp$ is merőleges a $\mathbf{q}^{(a)}$-ra. Valóban, a (7.12) felhasználásával írhatjuk, hogy

$$\mathbf{q}^{(a)}\cdot\mathbf{p}_\perp = \underbrace{\mathbf{q}^{(a)}\cdot\boldsymbol{Q}}_{\pm\mathbf{q}^{(a)}}\cdot\mathbf{v}_\perp = \pm\mathbf{q}^{(a)}\cdot\mathbf{v}_\perp = 0\,.$$

Geometriailag ez azt jelenti, hogy a $\mathbf{v}_\perp$ megtartja a saját síkját – a $\mathbf{v}$ támadáspontján átmenő és a $\mathbf{q}^{(a)}$-ra merőleges síkra gondolunk ehelyütt – és természetesen hosszát is a leképezés során.

Ha $\mathbf{p}_\perp = \mathbf{v}_\perp$, akkor a $\mathbf{v}_\perp$ helyben marad a leképezés során. Ez egyben azt is jelenti, hogy

– a $\det\left(Q^k{}_s\right) = 1$ esetben, amint az az előzőekből nyilvánvaló, a $\boldsymbol{Q}$ tenzor önmagára képezi le a $\mathbf{v}$ vektort, azaz

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I}\,, \tag{7.14}$$

– a $\det\left(Q^k{}_s\right) = -1$ esetben pedig a $\mathbf{v}_\perp$-t önmagára, a $\mathbf{v}_{||}$-t pedig önmaga tükörképére képezi le a $\boldsymbol{Q}$ tenzor, következőleg az egymásra kölcsönösen merőleges 1,2 és 3 jelű tengelyek által kifeszített lokális bázisban – a részleteket illetően a (b) ábrára utalunk – a

$$\left[Q^k{}_s\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{7.15}$$

képlet adódik a tenzor mátrixára

Ha $\mathbf{p}_\perp \neq \mathbf{v}_\perp$, akkor a $\mathbf{v}_\perp$ elfordul a $\mathbf{v}$ a támadáspontján átmenő és a $\mathbf{q}^{(a)}$-ra merőleges síkban. Az elfordulás ψ szöge minden $\mathbf{v}_\perp$-re – végigfutva gondolatban a tárgyvektorok teljes halmazát – ugyanaz kell, hogy legyen, ellenkező esetben ui. nem volna szögtartó a leképezés.

Maga a leképezés pedig

– a $\det\left(Q^k{}_s\right) = 1$ esetben a $\mathbf{v}$ vektor támadáspontjához kötött $\mathbf{q}^{(a)}$ mint tengely körüli forgatás, hiszen a tengelyre eső $\mathbf{v}_{||}$ képe önmaga, a $\mathbf{v}_\perp$ pedig a forgatás ψ szögével elfordul a $\mathbf{q}^{(a)}$-ra merőleges és a $\mathbf{v}$ támadáspontján átmenő síkban,

míg

– a $\det\left(Q^k{}_s\right) = -1$ esetben fentiekhez a $\mathbf{v}_{||}$ fenti síkra történő tükrözése járul – forgatás + tükrözés, hiszen a $\mathbf{v}_\perp$ tükörképe önmaga.

A kapott geometriai kép alapján a $\det\left(Q^k{}_s\right) = 1$ esetben a $\boldsymbol{Q}$ ortogonális tenzort forgatásnak, vagy forgató tenzornak nevezik és $\boldsymbol{R}$-el jelölik. Az $\boldsymbol{R}$ forgató tenzorok az ortogonális tenzorok egy alcsoportját alkotják.

7.1.3. Ortogonális tenzorok előállítása. Ortogonális tenzorok többféleképpen képezhetők. Legyen az $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ és $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ két egymástól különböző ortonormális vektorhármas:

$$\begin{aligned} &\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{c}\cdot\mathbf{c} = 1, \qquad &&\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = \mathbf{c}\cdot\mathbf{a} = 0\,, \\ &\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{B} = 1, \qquad &&\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{C}\cdot\mathbf{A} = 0\,. \end{aligned} \tag{7.16}$$

A

$$\boldsymbol{Q} = \mathbf{a}\otimes\mathbf{A} + \mathbf{b}\otimes\mathbf{B} + \mathbf{c}\otimes\mathbf{C} \tag{7.17}$$

tenzor ortogonális, hiszen a (7.16) felhasználásával azonnal következik, hogy

$$\boldsymbol{Q}^T\cdot\boldsymbol{Q} = \mathbf{A}\otimes\mathbf{A} + \mathbf{B}\otimes\mathbf{B} + \mathbf{C}\otimes\mathbf{C} = \boldsymbol{I} = \mathbf{a}\otimes\mathbf{a} + \mathbf{b}\otimes\mathbf{b} + \mathbf{c}\otimes\mathbf{c} = \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{Q}^T\,.$$

Az is nyilvánvaló, hogy

$$\begin{aligned} &\mathbf{a} = \boldsymbol{Q}\cdot\mathbf{A} &&\mathbf{b} = \boldsymbol{Q}\cdot\mathbf{B} &&\mathbf{c} = \boldsymbol{Q}\cdot\mathbf{C} \\ &\mathbf{A} = \boldsymbol{Q}^{-1}\cdot\mathbf{a} = \boldsymbol{Q}^T\cdot\mathbf{a} &&\mathbf{B} = \boldsymbol{Q}^{-1}\cdot\mathbf{b} = \boldsymbol{Q}^T\cdot\mathbf{b} &&\mathbf{C} = \boldsymbol{Q}^{-1}\cdot\mathbf{c} = \boldsymbol{Q}^T\cdot\mathbf{c} \end{aligned} \tag{7.18}$$

A leképezés forgatás, ha $\det\left(Q^k{}_s\right) = 1$. Ez az eset forog fenn például, ha a vektorhármasok jobb-, vagy balsodratúak.

Ha $\mathbf{c}=\mathbf{C}$ és a leképezés forgatás, akkor

$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{R}=\mathbf{a}\otimes\mathbf{A}+\mathbf{b}\otimes\mathbf{B}+\mathbf{C}\otimes\mathbf{C} \tag{7.19}$$

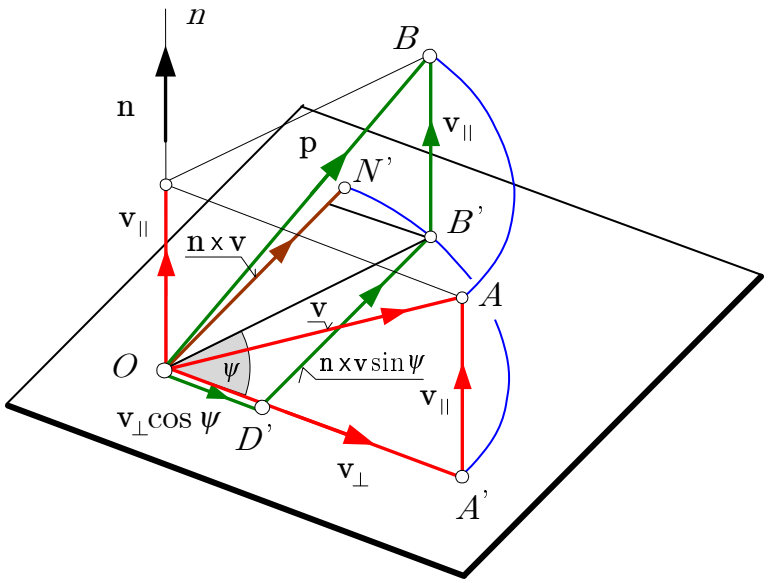
és

$$\mathbf{a}=\boldsymbol{R}\cdot\mathbf{A}\qquad\mathbf{b}=\boldsymbol{R}\cdot\mathbf{B}\qquad\mathbf{C}=\boldsymbol{R}\cdot\mathbf{C} \tag{7.20}$$

ami világosan mutatja, hogy a $\mathbf{C}$ vektort önmagára képezi le az $\boldsymbol{R}$ tenzor, míg az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ vektorok rendre az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{c}$ vektorokba fordulnak el.

7.2. A véges forgatás tenzorai

7.2.1. A véges forgatás tenzorának geometriai előállítása. Véges szöggel (azaz nem kis szöggel) történő forgatás esetén a 7.2. ábra alapján konstruálhatjuk meg a leképezés tenzorát. A forgatás n tengelyét az $\mathbf{n}$, $|\mathbf{n}|=1$ vektor jelöli ki. A forgatás szögét



7.2. ábra. Véges forgatás

pedig a ψ, $\psi\in(0,\pi)$ jelöli. A $\mathbf{v}=\overrightarrow{OA}$ vektort a forgatás egyelőre ismeretlen $\boldsymbol{R}$ tenzora a $\mathbf{p}=\overrightarrow{OB}$ vektorba forgatja el (képezi le).

Az alábbiakban, lépésről lépésre haladva, előállítjuk az $\boldsymbol{R}$ tenzort.

Leolvasható az ábráról, hogy

$$\mathbf{p}=\mathbf{v}_{||}+\overrightarrow{OB'}=\mathbf{v}_{||}+\overrightarrow{OD'}+\overrightarrow{D'B'} \tag{7.21}$$

Itt

$$\mathbf{v}_{||}=\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})=(\mathbf{n}\otimes\mathbf{n})\cdot\mathbf{v}\,, \tag{7.22a}$$

és az is igaz, hogy

$$\mathbf{v}_{\perp}=\mathbf{v}-\mathbf{v}_{||}=(\boldsymbol{I}-\mathbf{n}\otimes\mathbf{n})\cdot\mathbf{v}\,. \tag{7.22b}$$

Az $OD'B'$ derékszögű háromszög egyik, az OD' befogója tekintetében az ábra szerint az

$$\overrightarrow{OD'}=\mathbf{v}_{\perp}\cos\psi=\cos\psi(\boldsymbol{I}-\mathbf{n}\otimes\mathbf{n})\cdot\mathbf{v} \tag{7.23}$$

összefüggés áll fenn. Vegyük észre, hogy az $\overrightarrow{ON'}$ vektor úgy adódik, hogy az $\overrightarrow{OA'} = \mathbf{v}_\perp$ vektort elforgatjuk $\pi/2$-el az óramutató járásával ellentétesen az n tengely körül. Következőleg

$$\overrightarrow{ON'} = \mathbf{n}\times\mathbf{v}_\perp = \underbrace{\mathbf{n}\times(\mathbf{v}_{||}}_{\text{ez a tag zérus}} + \mathbf{v}_\perp)\cdot\mathbf{v} = \mathbf{n}\times\mathbf{v}\,. \tag{7.24}$$

Másrészt

$$\overline{ON'} = \overline{OB'}\,,$$

amivel

$$\overline{D'B'} = \overline{OB'}\sin\psi = \overline{ON'}\sin\psi\,. \tag{7.25}$$

Az $\overline{ON'}$ és $\overline{D'B'}$ párhuzamosságát is kihasználva a (7.24) és (7.25) egybevetése szerint

$$\overrightarrow{D'B'} = \sin\psi\,\mathbf{n}\times\mathbf{v}\,.$$

Ha ebbe a képletbe helyettesítjük a

$$\mathbf{n}\times\mathbf{v} = \boldsymbol{I}\cdot(\mathbf{n}\times\mathbf{v}) = (\boldsymbol{I}\times\mathbf{n})\cdot\mathbf{v}$$

átalakítást, akkor kapjuk, hogy

$$\overrightarrow{D'B'} = \sin\psi\,(\boldsymbol{I}\times\mathbf{n})\cdot\mathbf{v}\,. \tag{7.26}$$

A (7.22a), (7.23) és (7.26) összefüggések felhasználásával a $\mathbf{p}$-t adó (7.21) egyenletből a

$$\begin{aligned}\mathbf{p} &= [\mathbf{n}\otimes\mathbf{n} + \cos\psi\,(\boldsymbol{I} - \mathbf{n}\otimes\mathbf{n}) + \sin\psi\,\boldsymbol{I}\times\mathbf{n}]\cdot\mathbf{v}\\ &= [\cos\psi\,\boldsymbol{I} + (1-\cos\psi)\,\mathbf{n}\otimes\mathbf{n} + \sin\psi\,\boldsymbol{I}\times\mathbf{n}]\cdot\mathbf{v}\end{aligned} \tag{7.27}$$

eredményt kapjuk, ahol

$$\boxed{\begin{aligned}\boldsymbol{R} &= \cos\psi\,\boldsymbol{I} + (1-\cos\psi)\,\mathbf{n}\otimes\mathbf{n} + \sin\psi\,\boldsymbol{I}\times\mathbf{n}\,,\\ R_{kl} &= \cos\psi\,g_{kl} + (1-\cos\psi)\,n_k n_l + \sin\psi\,\varepsilon_{krl}\,n^r\end{aligned}} \tag{7.28}$$

a véges forgatás tenzora.

7.2.2. Ortogonális-e a véges forgatás tenzora. A kapott eredmény alapján azt a kérdést vizsgáljuk meg, hogy milyen feltételek mellett ortogonális a (7.28) általánosításának tekinthető

$$\boldsymbol{Q} = \cos\psi\,\boldsymbol{I} + (Q_{III} - \cos\psi)\,\mathbf{n}\otimes\mathbf{n} + \sin\psi\,\boldsymbol{I}\times\mathbf{n}\,, \tag{7.29}$$

tenzor, ahol a Q_{III} egyelőre ismeretlen paraméter.

A kérdés tisztázása a $\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{Q}^T$ szorzat vizsgálatát igényli.

Nyilvánvaló, hogy

$$\boldsymbol{Q}^* = \cos\psi\,\boldsymbol{I} + (Q_{III} - \cos\psi)\,\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}\,, \qquad \boldsymbol{Q}^* = (\boldsymbol{Q}^*)^T \tag{7.30}$$

a $\boldsymbol{Q}$ szimmetrikus része. Vegyük azt is észre, hogy

$$(\boldsymbol{I}\times\mathbf{n})^T = \left(\mathbf{g}^k\otimes\mathbf{g}_k\times\mathbf{n}\right)^T = \mathbf{g}_k\times\mathbf{n}\otimes\mathbf{g}^k = -\mathbf{n}\times\mathbf{g}_k\otimes\mathbf{g}^k = -\mathbf{n}\times\boldsymbol{I}\,. \tag{7.31}$$

Következőleg

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^* + \sin\psi\,\boldsymbol{I}\times\mathbf{n} \qquad \text{és} \qquad \boldsymbol{Q}^T = \boldsymbol{Q}^* - \sin\psi\,\mathbf{n}\times\boldsymbol{I}\,, \tag{7.32}$$

amivel

$$\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{Q}^T = \boldsymbol{Q}^*\cdot\boldsymbol{Q}^* + \sin\psi\,\left[(\boldsymbol{I}\times\mathbf{n})\cdot\boldsymbol{Q}^* - \boldsymbol{Q}^*\cdot(\mathbf{n}\times\boldsymbol{I})\right] - \sin^2\psi\,(\boldsymbol{I}\times\mathbf{n})\cdot(\mathbf{n}\times\boldsymbol{I})\,. \tag{7.33}$$

A végső eredmény előállításához szükség lesz a (7.33) összefüggés részeinek átalakításával kapcsolatos és a következőkben magyarázattal részletezett képletekre:

(a) A $\boldsymbol{Q}^*$-ot értelmező (7.30) alatti összefüggést is felhasználva kapjuk, hogy

$$(\boldsymbol{I}\times\mathbf{n})\cdot\boldsymbol{Q}^* = \boldsymbol{I}\cdot(\mathbf{n}\times\boldsymbol{Q}^*) = \mathbf{n}\times\boldsymbol{Q}^* = \mathbf{n}\times\boldsymbol{I}\,\cos\psi\,. \tag{7.34a}$$

(b) Ugyanilyen módon adódik, hogy:

$$\boldsymbol{Q}^*\cdot(\mathbf{n}\times\boldsymbol{I}) = (\boldsymbol{Q}^*\times\mathbf{n})\cdot\boldsymbol{I} = \boldsymbol{Q}^*\times\mathbf{n} = \boldsymbol{I}\times\mathbf{n}\,\cos\psi\,. \tag{7.34b}$$

(c) Nem nehéz belátni, hogy a fenti két képletben álló $\mathbf{n}\times\boldsymbol{I}$ és $\boldsymbol{I}\times\mathbf{n}$ szorzatok értéke azonos:

$$\mathbf{n}\times\boldsymbol{I} = n^r\mathbf{g}_r\times\mathbf{g}_k\otimes\mathbf{g}^k = n^r\varepsilon_{rks}\mathbf{g}^s\otimes\mathbf{g}^k = \mathbf{g}^k\otimes\mathbf{g}^s\varepsilon_{krs}n^r = \mathbf{g}^k\otimes\mathbf{g}_k\times\mathbf{g}_r n^r = \boldsymbol{I}\times\mathbf{n}\,. \tag{7.34c}$$

(d) További részeredmény kapható az alábbi átalakítással:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{I}\times\mathbf{n})\cdot(\mathbf{n}\times\boldsymbol{I}) &= (\mathbf{g}^k\otimes\mathbf{g}_k\times\mathbf{n})\cdot(\mathbf{n}\times\mathbf{g}^l\otimes\mathbf{g}_l) = \\ &= \underbrace{(\mathbf{g}_k\times\mathbf{n})\cdot(\mathbf{n}\times\mathbf{g}^l)}_{\mathbf{g}_k\cdot[\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{g}_l)]}\,\mathbf{g}^k\otimes\mathbf{g}_l = \mathbf{g}_k\cdot\left(n^l\mathbf{n}-\mathbf{g}^l\right)\mathbf{g}^k\otimes\mathbf{g}_l = \\ &= \left(n_k n^l-\delta_k{}^l\right)\,\mathbf{g}^k\otimes\mathbf{g}_l = \mathbf{n}\otimes\mathbf{n}-\boldsymbol{I}\,.\end{aligned} \tag{7.34d}$$

(e) A $\boldsymbol{Q}^*$ szimmetrikus tenzort adó (7.30) képlet alapján:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q}^*\cdot(\boldsymbol{Q}^*)^T &= \boldsymbol{Q}^*\cdot\boldsymbol{Q}^* = \\ &= \cos^2\psi\,\boldsymbol{I}+2\cos\psi\,\left(Q_{III}-\cos\psi\right)\,\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}+\left(Q_{III}-\cos\psi\right)^2\mathbf{n}\otimes\mathbf{n} = \\ &= \cos^2\psi\,\boldsymbol{I}+\left(Q_{III}^2-\cos^2\psi\right)\,\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}\,.\end{aligned} \tag{7.34e}$$

Felhasználva, illetve helyettesítve mostmár a (7.34a,...,e) részeredményeket a $\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{Q}^T$ szorzatot adó (7.33) képletbe a

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{Q}^T &= \cos^2\psi\,\boldsymbol{I}+\left(Q_{III}^2-\cos^2\psi\right)\,\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}+\sin^2\psi\,\boldsymbol{I}-\sin^2\psi\,\mathbf{n}\otimes\mathbf{n} \\ &= \boldsymbol{I}+\left(Q_{III}^2-1\right)\,\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}\end{aligned} \tag{7.35}$$

eredményt kapjuk. Akkor ortogonális a (7.29) képlettel értelmezett $\boldsymbol{Q}$ tenzor, ha egységtenzort ad a $\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{Q}^T$ szorzat. Azonnal látszik a (7.35) összefüggés alapján, hogy ennek a

$$Q_{III}^2 = 1\,, \qquad \text{azaz a} \qquad Q_{III} = \pm 1$$

reláció fennállása a feltétele.

A továbbiakban tisztázzuk a Q_{III} jelentését. Tegyük fel, hogy ortonormális bázisban vagyunk és fennáll a

$$\mathbf{n} = \mathbf{g}^1 = \mathbf{g}_1$$

egyenlet. Ez esetben

$$\begin{aligned}\det(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{Q}^T) = \det(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{Q}^T) = |Q^k{}_m\,Q^m{}_r| = \det(\boldsymbol{I}+\left(Q_{III}^2-1\right)\,\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}) = \\ = \begin{vmatrix}1+Q_{III}^2-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix} = Q_{III}^2\,.\end{aligned}$$

A kapott képlet szerint Q_{III} a $\boldsymbol{Q}$ tenzor harmadik skalárinvariánsának vehető.

Összegezve a szakasz eredményeit igazoltuk, hogy a (7.29) képlettel adott tenzor ortogonális, ha $Q_{III} = \pm 1$, ahol Q_{III} a tenzor harmadik skalárinvariánsa. $Q_{III} = 1$-re a (7.29) alatti előállítás megegyezik a véges forgatás $\boldsymbol{R}$ tenzorával. Következésképp ortogonális az $\boldsymbol{R}$ tenzor.

Szokás a véges forgatás R_{kl} tenzorát a

$$\boldsymbol{\psi} = \psi_k\,\mathbf{g}^k = \psi\,\mathbf{n} \tag{7.36}$$

forgásvektor, illetve a hozzátartozó

$$\Psi_{kl} = -\varepsilon_{klm}\psi^m \tag{7.37}$$

ferdeszimmetrikus forgástenzor segítségével is felírni.

A (7.36) forgásvektor helyettesítésével adódik (7.28)-ból az

$$\boxed{R_{kl} = \cos\psi\, g_{kl} + \frac{1-\cos\psi}{\psi^2}\,\psi_k\psi_l - \frac{\sin\psi}{\psi}\,\varepsilon_{klm}\,\psi^m} \tag{7.38}$$

eredmény, ami a véges forgatás tenzorának második alakja.

Tekintsük most a

$$\Psi_{ks}\Psi^s{}_l = \varepsilon_{ksm}\,\psi^m\,\varepsilon^{str}\,\psi_r\,g_{tl} = \varepsilon^{str}\,\varepsilon_{smk}\,\psi^m\,\psi_r\,g_{tl} = \\ = (\delta^t{}_m\,\delta^r{}_k - \delta^r{}_m\,\delta^t{}_k)\,\psi^m\,\psi_r\,g_{tl} = \psi_k\,\psi_l - g_{kl}\,\psi^r\,\psi_r\ ,$$

átalakítást, ahonnan

$$\psi_k\,\psi_l = \Psi_{ks}\Psi^s{}_l + g_{kl}\,\psi^r\,\psi_r\ .$$

Az utóbbi eredmény (7.38)-ba történő helyettesítésével

$$R_{kl} = \cos\psi\, g_{kl} + \frac{1-\cos\psi}{\psi^2}\ (\Psi_{ks}\Psi^s{}_l + g_{kl}\,\psi^r\,\psi_r) - \frac{\sin\psi}{\psi}\,\varepsilon_{klm}\,\psi^m\ ,$$

azaz

$$\boxed{R_{kl} = g_{kl} + \frac{1-\cos\psi}{\psi^2}\,\Psi_{ks}\,\Psi^s{}_l + \frac{\sin\psi}{\psi}\,\Psi_{kl}} \tag{7.39}$$

a véges forgatás tenzorának harmadik alakja.

7.2.3. A poláris felbontási tétel. A véges forgatással kapcsolatos eredmények is megjelennek a kontinuumok alakváltozási elméletében nagy jelentőségű poláris felbontási tételben:

Legyen pozitív az $\boldsymbol{F} = F^k{}_l\,\mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}^l$ *másodrendű tenzor determinánsa:*

$$|F^k{}_l| > 0\ . \tag{7.40}$$

Ez esetben mindig megadható az $\boldsymbol{F}$ *az*

$$\boxed{\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{U} = \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{R}} \tag{7.41}$$

alakban, ahol az $\boldsymbol{U}$ *és* $\boldsymbol{V}$ *pozitív definit szimmetrikus tenzorok, míg az* $\boldsymbol{R}$ *tenzor forgatás. Emellett mind* $\boldsymbol{U}$*, mind pedig* $\boldsymbol{V}$ *egyetlen:*

$$\boxed{\boldsymbol{U} = \sqrt{\boldsymbol{F}^T\cdot\boldsymbol{F}}\,; \qquad \boldsymbol{V} = \sqrt{\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F}^T}\ .} \tag{7.42}$$

Az $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{U}$ és $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{R}$ előállítások az $\boldsymbol{F}$ ún. jobboldali és baloldali poláris felbontásai.

Az igazolás első lépésében megmutatjuk, hogy

$$\boldsymbol{F}^T\cdot\boldsymbol{F} \qquad \text{és} \qquad \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F}^T$$

egyaránt szimmetrikus és pozitív definit. A szimmetria azonnal következik az

$$\left(\boldsymbol{F}^T\cdot\boldsymbol{F}\right)^T = \boldsymbol{F}^T\cdot\left(\boldsymbol{F}^T\right)^T = \boldsymbol{F}^T\cdot\boldsymbol{F}\ ,$$
$$\left(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F}^T\right)^T = \left(\boldsymbol{F}^T\right)^T\cdot\boldsymbol{F}^T = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F}^T$$

átalakításokból. Az is fennáll, ha a $\mathbf{v}$ tetszőleges vektor, hogy

$$\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F}^T\cdot\mathbf{v} = \left(\boldsymbol{F}^T\cdot\mathbf{v}\right)\cdot\left(\boldsymbol{F}^T\cdot\mathbf{v}\right) \geq 0\ ,$$
$$\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{F}^T\cdot\boldsymbol{F}\cdot\mathbf{v} = (\boldsymbol{F}\cdot\mathbf{v})\cdot(\boldsymbol{F}\cdot\mathbf{v}) \geq 0\ .$$

Mivel az $\boldsymbol{F}$ invertálható az $\boldsymbol{F}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{0}$ ($\boldsymbol{F}^T\cdot\mathbf{v}=\mathbf{0}$) egyenletnek csak $\mathbf{v}=\mathbf{0}$ esetén zérus a jobboldala. Következésképp

$$\boldsymbol{F}^T\cdot\boldsymbol{F} \qquad \text{és} \qquad \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F}^T$$

egyaránt pozitív definit.

Unicitás. Legyen az $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{U}$ az $\boldsymbol{F}$ egy jobboldali poláris felbontása. Mivel az $\boldsymbol{R}$ forgatás teljesülni kell a

$$\boldsymbol{F}^T\cdot\boldsymbol{F}=\boldsymbol{U}^T\cdot\underbrace{\boldsymbol{R}^T\cdot\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{I}}\cdot\boldsymbol{U}=\boldsymbol{U}^2$$

egyenletnek. A négyzetgyökvonással kapcsolatos unicitási tételt is kihasználva megállapítható, hogy egy és csakis egy olyan pozitív definit és szimmetrikus $\boldsymbol{U}$ létezik, amelyre igaz, hogy a négyzete $\boldsymbol{F}^T\cdot\boldsymbol{F}$. Mivel $\boldsymbol{U}$ egyetlen, a $(7.41)_1$ alapján adódó

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{U}^{-1}$$

is egyetlen.

Létezés. Értelmezzük az $\boldsymbol{U}$-t a $(7.42)_1$ összefüggéssel és legyen

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{U}^{-1}\,.$$

Annak igazolásához, hogy a $(7.41)_1$ poláris felbontás, már csak azt kell megmutatni, hogy az $\boldsymbol{R}$ forgató tenzor (vagyis $\det(\boldsymbol{R})>0$ és $\boldsymbol{R}^T\cdot\boldsymbol{R}=\boldsymbol{I}$).

Mivel $\det(\boldsymbol{F})>0$ (feltevés volt) és $\det(\boldsymbol{U})>0$ ($\boldsymbol{U}$ pozitív definit), az következik, hogy $\det(\boldsymbol{R})>0$. Másrészt

$$\boldsymbol{R}^T\cdot\boldsymbol{R}=\boldsymbol{U}^{-1}\cdot\underbrace{\boldsymbol{F}^T\cdot\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{U}^2}\cdot\boldsymbol{U}^{-1}=\boldsymbol{I}$$

vagyis valóban forgató tenzor az $\boldsymbol{R}$.

Ezzel a igazoltuk a jobboldali poláris felbontás létezését és unicitását.

Értelmezzük most a $\boldsymbol{V}$ tenzort a

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{R}^T \tag{7.43}$$

módon. Mivel az $\boldsymbol{R}$ és $\boldsymbol{U}$ egyetlen, a $\boldsymbol{V}$ is az.

Vegyük észre, hogy a $\boldsymbol{V}$ szimmetrikus és pozitív definit.

Valóban

(a) a szimmetria azonnal következik a

$$\boldsymbol{V}^T=\left(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{R}^T\right)^T=\boldsymbol{R}\cdot(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{U})^T=\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{R}^T=\boldsymbol{V}$$

átalakításból.

(b) Ami a pozitív definitséget illeti tetszőlegesnek tekintve a $\mathbf{v}$ vektort írhatjuk, hogy

$$\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{V}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{v}\cdot\underbrace{\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{R}^T}_{\boldsymbol{V}}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{R}\cdot\sqrt{\boldsymbol{U}}\cdot\sqrt{\boldsymbol{U}}\cdot\boldsymbol{R}^T\cdot\mathbf{v}=$$

$$=\left(\sqrt{\boldsymbol{U}}\cdot\boldsymbol{R}^T\cdot\mathbf{v}\right)\cdot\left(\sqrt{\boldsymbol{U}}\cdot\boldsymbol{R}^T\cdot\mathbf{v}\right)=\left(\sqrt{\boldsymbol{U}}\cdot\boldsymbol{R}^T\cdot\mathbf{v}\right)^2\geq 0\,,$$

ahol $\sqrt{\boldsymbol{U}}\cdot\boldsymbol{R}^T$ invertálható (zérustól különböző a determinánsa), ezért csak $\mathbf{v}=0$ esetén lehet a jobboldal zérus: a $\boldsymbol{V}$ tehát pozitív definit.

A (7.43) egyenlettel értelmezett $\boldsymbol{V}$-re nézve az is fennáll, hogy

$$\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{U}\cdot\underbrace{\boldsymbol{R}^T\cdot\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{I}}=\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{U}=\boldsymbol{F}\,,$$

ami azt jelenti, hogy $\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{R}$ a baloldali poláris felbontás.

Végezetül vegyük azt is észre, hogy

$$\boldsymbol{V}^2 = \underbrace{\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{F}}\cdot\underbrace{\boldsymbol{R}^T\cdot\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{I}}\cdot\underbrace{\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{R}^T}_{\boldsymbol{F}^T} = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F}^T\ .$$

Ez egyben azt is jelenti, hogy fennáll a $(7.42)_2$ egyenlet is.

Gyakorlatok

1. Ellenőrizze, hogy az (y_1, y_2, y_3) kartéziuszi KR-ben tekintett $\boldsymbol{Q}_1$ és $\boldsymbol{Q}_2$ tenzorok ortogonálisak!

$$\underline{\mathbf{Q}}_1 = \left[\begin{array}{ccc} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right], \qquad \underline{\mathbf{Q}}_2 = \left[\begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{array}\right].$$

   Melyik tenzor forgató tenzor?
2. Igazolja, hogy az (y_1, y_2, y_3) kartéziuszi KR origójához kötöttnek gondolt $\boldsymbol{Q}$ tenzor forgatótenzor. Határozza meg a forgatás tengelyét és szögét, ha

$$\underline{\mathbf{Q}} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right]$$

   a tenzor mátrixa ebben a KR-ben.
3. Igazolja, hogy két ortogonális tenzor összege nem szükségképp ortogonális tenzor.
4. Legyen $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ és $\boldsymbol{R}$ ortogonális tenzor. Igazolja, hogy a $\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{R}$ szorzat ortogonális tenzor.
5. A $\boldsymbol{P}$ tenzort permutációs mátrixúnak nevezzük, ha $\left[p_k{}^l\right]$ egy-egy sorában és oszlopában álló három elem közül kettő zérus, a harmadik pedig egységnyi. Mutassa meg, hogy ez a tenzor ortogonális.
6. Legyen az $\mathbf{a}$ egységvektor. Igazolja, hogy az alábbi tenzor ortogonális:

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I} - 2\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}$$

7. Legyen a $\boldsymbol{Q}$ ortogonális tenzor. Legyen továbbá n pozitív egész szám. Mutassa meg, hogy $\boldsymbol{Q}^n$ ortogonális tenzor.
8. Igazolja szimbolikus jelölésrendszerben, hogy a

$$\boldsymbol{Q}.\mathbf{a} = \pm\mathbf{a}$$

   egyenletnek $\pm\mathbf{q}_a$ ($\mathbf{q}_a$ a tenzor vektorinvariánsa) a megoldása az $\mathbf{a}$ vektorra nézve, ahol pozitív az előjel ha $\det(Q_p^k) = 1$ és negatív, ha $\det(Q_p^k) = -1$.
9. Legyenek valamely (x) görbevonalú KR egy $\underline{\mathrm{P}}$ pontjában

$$\mathbf{g}_1 = \mathbf{i}_1\,, \qquad \mathbf{g}_2 = \frac{\mathbf{i}_2}{2}\,, \qquad \mathbf{g}_3 = \mathbf{i}_3\,,$$
$$\mathbf{g}^1 = \mathbf{i}^1, \qquad \mathbf{g}^2 = 2\mathbf{i}^2\,, \qquad \mathbf{g}^3 = \mathbf{i}^3$$

   a kovariáns és kontravariáns bázisvektorok az (y) kartéziuszi KR bázisvektoraival felírva – lásd a 4.2.a. ábrát. Ezek birtokában

$$[g_{mn}] = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \text{és} \qquad \left[g^{kl}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

a két metrikus tenzor és

$$\left[\tau_n{}^{l}\right] = \left[\mathbf{g}_n \cdot \mathbf{i}^{l}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad \left[t_{l}{}^{k}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a két transzformációs tenzor. Határozza meg az $\boldsymbol{F}$ tenzor tenzor poláris felbontásait:

$$\left[F^{n}_{\ q}\right] = \begin{bmatrix} 0 & -0.8 & -1.2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 3.4 \end{bmatrix}, \qquad \left[F_{m}{}^{r}\right] = \begin{bmatrix} 0 & -3.2 & -1.2 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 2.4 & 3.4 \end{bmatrix}.$$

(A teljesség kedvéért megadtuk a tenzor kontravariáns-kovariáns koordinátái mellett a kovariáns-kontravariáns koordinátákat is.)

8. FEJEZET

Tenzorok analízisének elemei

8.1. Deriválások görbevonalú KR-ben

8.1.1. Bázisvektorok analízise. Ha valamely, mondjuk az $\mathbf{u}$ vektort parciálisan deriválni kell az x^k koordináták szerint, akkor a bázisvektorokat is deriválni kell. Az (y) kartéziuszi KR-ben érvényes

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y^l} = \frac{\partial}{\partial y^l}\left(u^k\, \boldsymbol{i}_k\right) = \frac{\partial u^k}{\partial y^l}\, \boldsymbol{i}_k\,, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{i}_k}{\partial y^l} = 0$$

képlet helyére görbevonalú KR-ben a

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^l} = \frac{\partial}{\partial x^l}\left(u^k\, \boldsymbol{g}_k\right) = \frac{\partial u^k}{\partial x^l}\, \boldsymbol{g}_k + u^k\, \frac{\partial \boldsymbol{g}_k}{\partial x^l}\,, \tag{8.1a}$$

vagy a

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^l} = \frac{\partial}{\partial x^l}\left(u_k\, \boldsymbol{g}^k\right) = \frac{\partial u_k}{\partial x^l}\, \boldsymbol{g}^k + u_k\, \frac{\partial \boldsymbol{g}^k}{\partial x^l} \tag{8.1b}$$

képletek lépnek, mivel a bázisvektorok is a hely függvényei. A (8.1a,b) képletek világosan mutatják, hogy a bázisvektorok deriváltjainak fontos szerepe van a vektorok és tenzorok görbevonalú KR-ben történő deriválásában.

Az (1.40) és (1.38) összefüggések felhasználásával könnyen belátható, hogy

$$\frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial x^l} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x^k \partial x^l} = \frac{\partial \mathbf{g}_l}{\partial x^k} = \frac{\partial^2 y^p}{\partial x^k \partial x^l}\, \mathbf{i}_p = \frac{\partial^2 y^p}{\partial x^k \partial x^l}\, \frac{\partial x^r}{\partial y^p}\, \mathbf{g}_r \tag{8.2}$$

A továbbiakban megállapodunk abban, hogy a helykoordináták szerinti parciális deriválást, összhangban az indexes jelölés szellemével, a

$$\frac{\partial}{\partial x^r}(\ldots) = (\ldots)\partial_r = (\ldots)_{,\,r}; \qquad \frac{\partial}{\partial y^p}(\ldots) = (\ldots)\partial_p = (\ldots)_{,\,p} \tag{8.3}$$

módon szedjük. Szavakban: az alulsó indexsorban írt vessző után álló és a koordinátát azonosító index is jelölheti a koordináta szerinti parciális deriváltat. Ez a jelölés az illető mennyiség alulsó indexsorának legvégén kell, hogy legyen elhelyezve.

A Γ^r_{kl} másodfajú és $\Gamma_{kl,r}$ elsőfajú *Christoffel szimbólumokat* a

$$\boxed{\mathbf{g}_k \partial_l = \mathbf{g}_{k\,,\,l} = \Gamma^r_{kl}\, \mathbf{g}_r = \Gamma_{kl\,,\,r}\, \mathbf{g}^r} \tag{8.4}$$

egyenlet értelmezi. Hangsúlyozzuk, hogy ez esetben a vessző után álló r index nem parciális deriváltat jelöl. Ha átszorzunk skalárisan a $\mathbf{g}^q$ vektorral, akkor tekintettel a (8.2) összefüggésre is, a

$$\mathbf{g}_{k\,,\,l} \cdot \mathbf{g}^q = \Gamma^q_{kl} = y^p{}_{,\,kl}\, \frac{\partial x^q}{\partial y^p} \tag{8.5}$$

képletet kapjuk Γ^q_{kl} számítására. A (8.2) és (8.5) összefüggésekből egyaránt következik, hogy a Γ^q_{kl} és $\Gamma_{kl\,,\,r}$ Christoffel szimbólumok szimmetrikusak a kl indexpár tekintetében:

$$\boxed{\Gamma^q_{kl} = \Gamma^q_{lk}\,, \qquad \Gamma_{kl\,,\,r} = \Gamma_{lk\,,\,r}} \tag{8.6}$$

Később, a 8.1.2. szakaszban igazolni fogjuk, hogy a Christoffel szimbólumok nem tenzorok.

A (8.4) egyenlet $\mathbf{g}^q$-val történő skaláris szorzása után, ezúttal az első egyenlőségjeltől jobbra álló képletrészeket hasznosítva a

$$\Gamma_{kl}^{\,r}\underbrace{\mathbf{g}^q\cdot\mathbf{g}_r}_{\delta^q{}_r}=\Gamma_{kl\,,r}\underbrace{\mathbf{g}^q\cdot\mathbf{g}^r}_{g^{qr}}$$

azaz a

$$\boxed{\Gamma_{kl}^{\,q}=\Gamma_{kl\,,r}\,g^{rq}} \tag{8.7}$$

egyenletet kapjuk, ami azt fejezi ki, hogy $\Gamma_{kl\,,r}$ birtokában $\Gamma_{kl}^{\,q}$ az r index felemelésével adódik. Ha a (8.4)-ben $\mathbf{g}_r$ helyére $\mathbf{g}^r=g^{rs}\mathbf{g}_s$-t írunk, majd átszorzunk skalárisan $\mathbf{g}_q$-val, akkor a

$$\Gamma_{kl}^{\,r}\underbrace{\mathbf{g}_r\cdot\mathbf{g}_q}_{g_{rq}}=\Gamma_{kl\,,r}\,g^{rs}\underbrace{\mathbf{g}_s\cdot\mathbf{g}_q}_{g_{sq}}=\Gamma_{kl\,,r}\underbrace{g^{rs}\,g_{sq}}_{\delta^r{}_q}\,,$$

azaz a

$$\boxed{\Gamma_{kl\,,q}=\Gamma_{kl}^{\,r}\,g_{rq}} \tag{8.8}$$

eredmény adódik. Szavakban $\Gamma_{kl\,,q}$ a $\Gamma_{kl}^{\,r}$ másodfajú Christoffel szimbólum r indexének lesüllyesztésével számítható.

A $\mathbf{g}^r$ felsőindexes bázisvektorok x^l szerinti parciális deriváltja ugyancsak megadható a Christoffel szimbólumok segítségével. Valóban, ha a $\delta^q{}_k$ Kronecker szimbólumot parciálisan deriváljuk az x_l szerint és felhasználjuk a (8.6) összefüggést, akkor a

$$0=\delta^q{}_{k\,,l}=\left(\mathbf{g}^q\cdot\mathbf{g}_k\right)_{,\,l}=\mathbf{g}^q{}_{,\,l}\cdot\mathbf{g}_k+\underbrace{\mathbf{g}^q\cdot\mathbf{g}_{k\,,\,l}}_{\Gamma_{kl}^{\,q}}\,,$$

illetve a

$$\mathbf{g}^q{}_{,\,l}\cdot\mathbf{g}_k=-\Gamma_{kl}^{\,q}$$

összefüggés adódik, ahonnan

$$\boxed{\mathbf{g}^q{}_{,\,l}=-\Gamma_{kl}^{\,q}\,\mathbf{g}^k\,.} \tag{8.9}$$

A Christoffel szimbólumok kiszámíthatóak a (8.5) és (8.8) képletek segítségével, feltéve, hogy mind az $x^i=x^i(y^1,y^2,y^3)$ függvények, mind pedig az $y^i=y^i(x^1,x^2,x^3)$ inverz függvények ismertek. A Christoffel szimbólumok meghatározására azonban további lehetőségek is vannak.

Deriváljuk a g_{rs} metrikus tenzort x^p szerint és használjuk ki a (2.3a) és (8.4) képleteket:

$$g_{rs\,,p}=\left(\mathbf{g}_r\cdot\mathbf{g}_s\right)_{,\,p}=\mathbf{g}_{r\,,p}\cdot\mathbf{g}_s+\mathbf{g}_r\cdot\mathbf{g}_{s\,,p}=\Gamma_{rp\,,s}+\Gamma_{sp\,,r}\,. \tag{8.10}$$

A (8.10) összefüggés alapján adódó

$$\begin{aligned}g_{rs\,,p}&=\Gamma_{rp\,,s}+\Gamma_{sp\,,r}\,,\\ g_{ps\,,r}&=\Gamma_{pr\,,s}+\Gamma_{sr\,,p}\,,\\ g_{pr\,,s}&=\Gamma_{ps\,,r}+\Gamma_{rs\,,p}\end{aligned}$$

egyenleteket 1/2-el szorozva és az első kettő összegéből az utolsót levonva a

$$\boxed{\Gamma_{pr\,,s}=\frac{1}{2}\,\left(g_{rs\,,p}+g_{ps\,,r}-g_{pr\,,s}\right)} \tag{8.11}$$

az eredmény következik.

További lehetőséget kínál a Christoffel szimbólumok számítására a (8.7) összefüggés alapján a g^{pm} szimmetriája és a (8.10) képlet kihasználásával írható

$$\Gamma^m_{km} = \Gamma_{km\,,p}\, g^{pm} = \frac{1}{2} \underbrace{(\Gamma_{km\,,p} + \Gamma_{kp\,,m})}_{g_{mp\,,k}}\, g^{pm} = \frac{1}{2}\, g^{mp}\, g_{mp\,,k}$$

egyenlet, ha figyelembe vesszük az alábbiakat:

(1) A $G^{mq}\, g_{qr} = g_o \delta^m{}_r$ egyenlet – itt G^{mq} a vonatkozó adjungált – g_{pr} szerinti parciális deriváltját képezve azt kapjuk, hogy

$$\underbrace{\frac{\partial G^{mq}\, g_{qr}}{\partial g_{pr}}}_{G^{mq}\delta^p{}_q} = \underbrace{\frac{\partial g_o}{\partial g_{pr}} \delta^m{}_r}_{\frac{\partial g_o}{\partial g_{mp}}}, \quad \text{hiszen} \quad \frac{\partial G^{mq}}{\partial g_{pr}} = 0 \ \text{ és } \ \frac{\partial g_{qr}}{\partial g_{pr}} = \delta^p{}_q\,.$$

Innen $1/g_o$-val történő átszorzással az

$$\frac{1}{g_o}\, G^{mp} = g^{mq} = \frac{1}{g_o}\, \frac{\partial g_o}{\partial g_{mp}}$$

összefüggés következik.

(2) A (3.15a) szerint $g_o = (\gamma_o)^2$.

A fentiek alapján

$$\Gamma^m_{km} = \frac{1}{2}\, \frac{1}{g_o}\, \frac{\partial g_o}{\partial g_{mp}}\, \frac{\partial g_{mp}}{\partial x^k} = \frac{1}{2}\, \frac{1}{g_o}\, \frac{\partial g_o}{\partial x^k} = \frac{1}{\gamma_o}\, \frac{\partial \gamma_o}{\partial x^k}\,. \tag{8.12}$$

8.1.2. Tenzorok-e a Christoffel szimbólumok. Vizsgáljuk meg azt a kérdést, vajon tenzorok-e a másodfajú Christoffel szimbólumok. A (ξ) görbevonalú KR-ben a (8.5) összefüggés alapján – ezúttal mindenütt kiírva a parciális deriváltakat és felhasználva a bázisvektorokkal kapcsolatos (4.21) transzformációs szabályt, valamint a bázisvektorok számításának (1.40) alatti képletét, továbbá a láncszabályt

$$'\Gamma^k_{pq} = \frac{\partial\, '\mathbf{g}_p}{\partial \xi^q} \cdot {}'\mathbf{g}^k = \frac{\partial\, '\mathbf{g}_p}{\partial \xi^q} \cdot \frac{\partial \xi^k}{\partial x^m}\, \mathbf{g}^{\mathbf{m}} =$$

$$= \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \xi^p\, \partial \xi^q} \cdot \frac{\partial \xi^k}{\partial x^m}\, \mathbf{g}^{\mathbf{m}} = \frac{\partial}{\partial x^s} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^n} \frac{\partial x^n}{\partial \xi^p} \right) \frac{\partial x^s}{\partial \xi^q} \cdot \frac{\partial \xi^k}{\partial x^m}\, \mathbf{g}^m$$

a másodfajú Christoffel szimbólum. A továbbiak során elvégezzük az x^s szerinti deriválást, és ismét alkalmazzuk a bázisvektorok (1.40) számítási képletét:

$$\underline{'\Gamma^k_{pq}} = \left(\frac{\partial \mathbf{g}_n}{\partial x^s}\, \frac{\partial x^n}{\partial \xi^p}\, \frac{\partial x^s}{\partial \xi^q} + \mathbf{g}_n\, \frac{\partial^2 x^n}{\partial \xi^p\, \partial \xi^q} \right) \cdot \frac{\partial \xi^k}{\partial x^m}\, \mathbf{g}^m =$$

$$= \frac{\partial \mathbf{g}_n}{\partial x^s} \cdot \mathbf{g}^m\, \frac{\partial x^n}{\partial \xi^p}\, \frac{\partial x^s}{\partial \xi^q}\, \frac{\partial \xi^k}{\partial x^m} + \frac{\partial^2 x^n}{\partial \xi^p\, \partial \xi^q}\, \frac{\partial \xi^k}{\partial x^m}\, \delta_n{}^m =$$

$$= \underline{\Gamma^m_{ns}\, t_p{}^n\, t_q{}^s\, \tau^k_m} + \frac{\partial^2 x^n}{\partial \xi^p\, \partial \xi^q}\, \frac{\partial \xi^k}{\partial x^n}\,.$$

Ez az eredmény már tükrözi, hogy a másodfajú Christoffel szimbólumok nem tenzorok. Ha ugyanis azok lennének, akkor – összhangban a kovariáns és kontravariáns indexek transzformációs képleteivel – az aláhúzással kiemelt részek egyenlőségének kellene fennállnia. A jobboldalon lévő második összeadandó jelenléte tehát annak a bizonyítéka, hogy nem tenzorok a másodfajú (következésképp az elsőfajú) Christoffel szimbólumok.

8.2. Tenzormezők deriváltjai

8.2.1. A deriváltak értelmezése. Legyen az

$$\mathbf{u}(t)$$

valamilyen tenzor (skalár, vektor, másodrendű tenzor, etc.) skalár függvény, amelynek a t skalár a paramétere (ez az idő, vagy valamilyen más skalár paraméter pl. az s ívkoordináta lehet). Az $\mathbf{u}(t)$ függvény t helyen vett $\dot{\mathbf{u}}(t)$ deriváltját, ha az létezik, az

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\alpha\to 0} \frac{1}{\alpha}\,[\mathbf{u}(t+\alpha) - \mathbf{u}(t)] \tag{8.13}$$

összefüggés értelmezi. Mivel két ugyanolyan rangú tenzor különbsége az eredetiekkel azonos rangú tenzor a skalár paraméter szerinti deriválás nem változtatja meg a tenzor rangját. Az $\mathbf{u}(t)$ függvény sima, ha az $\dot{\mathbf{u}}(t)$ derivált létezik és folytonos a tenzor skalár függvény értelmezési tartományában.

Tegyük fel, hogy differenciálható az $\mathbf{u}(t)$ a t helyen. Ekkor a (8.13) szerint

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{1}{\alpha}\,[\mathbf{u}(t+\alpha) - \mathbf{u}(t) - \alpha\dot{\mathbf{u}}(t)] = 0\,,$$

azaz

$$\mathbf{u}(t+\alpha) = \mathbf{u}(t) + \dot{\mathbf{u}}\alpha + o(\alpha)\,, \tag{8.14}$$

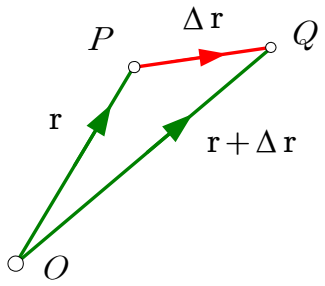
ahol

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{o(\alpha)}{\alpha} = 0\,,$$

vagyis $o(\alpha)$ gyorsabban tart zérushoz, mint α. A (8.14) képlet azt fejezi ki, hogy az

$$\mathbf{u}(t+\alpha) - \mathbf{u}(t)$$

különbség linearizálható a t helyen.



8.1. ábra. $\Delta\mathbf{r}$ szemléltetése

Tekintsük most az $\mathfrak{A}(\mathbf{r})$ tenzormezőt (az $\mathfrak{A}(\mathbf{r})$ skalár, vektor, másodrendű vagy magasabbrendű tenzor lehet a P pont környezetében). Az $\mathfrak{A}(\mathbf{r})$ függvény differenciálható az $\mathbf{r}$ helyen, ha az

$$\mathfrak{A}(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}) - \mathfrak{A}(\mathbf{r})$$

különbség felírható az

$$\mathfrak{A}(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}) - \mathfrak{A}(\mathbf{r}) = \mathrm{D}\mathfrak{A}(\mathbf{r})[\Delta\mathbf{r}] + o(\Delta\mathbf{r}) \tag{8.15}$$

alakban, ahol $\mathrm{D}\mathfrak{A}(\mathbf{r})$ a derivált,

$$\mathrm{D}\mathfrak{A}(\mathbf{r})[\Delta\mathbf{r}]$$

homogén lineáris függvénye a $\Delta\mathbf{r}$-nek, míg az $o(\Delta\mathbf{r})$ tag gyorsabban tart zérushoz mint a $\Delta\mathbf{r}$. Maga a homogén lineáris tag a

$$\mathrm{D}\mathfrak{A}(\mathbf{r})[\Delta\mathbf{r}] = \lim_{\alpha\to 0} \frac{1}{\alpha}\,[\mathfrak{A}(\mathbf{r}+\alpha\Delta\mathbf{r}) - \mathfrak{A}(\mathbf{r})] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\,[\mathfrak{A}(\mathbf{r}+\alpha\Delta\mathbf{r})]\big|_{\alpha=0} \tag{8.16}$$

módon számítható.

Példaként tekintsük a $\phi(\mathbf{r}) = \mathbf{r}\cdot\mathbf{r}$ skalárfüggvényt. A (8.16) összefüggés alapján

$$\mathrm{D}\phi(\mathbf{r})[\Delta\mathbf{r}] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\,[\phi(\mathbf{r}+\alpha\Delta\mathbf{r})]\big|_{\alpha=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\,\left(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} + 2\alpha\mathbf{r}\cdot\Delta\mathbf{r} + \alpha^2\Delta\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}\right)\big|_{\alpha=0} =$$
$$= (2\mathbf{r}\cdot\Delta\mathbf{r} + 2\alpha\Delta\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})\big|_{\alpha=0} = 2\mathbf{r}\cdot\Delta\mathbf{r}$$

a $\Delta\mathbf{r}$-ben lineáris tag.

A (8.13) és (8.16) értelmezések KR függetlenek.

A homogén lineáris tag (x) görbevonalú KR-ben történő számításához feltételezzük, hogy

$$\Delta\mathbf{r} = \Delta x^K\, \mathbf{g}_K\,.$$

Mivel a K index rögzített ezzel a választással (a) $\mathbf{g}_K$ irányú a $\Delta\mathbf{r}$ a P pont környezetében, (b) és ezért úgy tekinthető, hogy az $\mathfrak{A}(\mathbf{r})$ a $t{=}x^K$ skalár függvénye, a másik két koordináta pedig rögzített. Következőleg

$$\mathfrak{A}(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}) = \mathfrak{A}(\underbrace{x^K}_{t}+\underbrace{\Delta x^K}_{\alpha})\,,$$

ami egyúttal azt jelenti, hogy a homogén lineáris tag a (8.14) részeként megjelenő $\dot{\mathbf{u}}\alpha$ formula alapján számítható:

$$\mathrm{D}\mathfrak{A}[\Delta\mathbf{r}] = \underbrace{\frac{\partial\,\mathfrak{A}}{\partial x^K}}_{\frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{A}}{\mathrm{d}t}}\Bigg|_{\alpha=\Delta x^K=0}\underbrace{\Delta x^K}_{\alpha} = \left(\mathfrak{A}\otimes\frac{\partial}{\partial x^K}\,\mathbf{g}^K\right)\Bigg|_{\Delta x^K=0}\cdot\underbrace{\Delta x^K\,\mathbf{g}_K}_{\Delta\mathbf{r}} \tag{8.17}$$

Az utóbbi képlet alapján a

$$\boxed{\nabla = \mathbf{g}^k\,\frac{\partial}{\partial x^k}} \tag{8.18}$$

egyenlettel értelmezzük a nabla operátort. Vegyük észre, hogy

$$\mathbf{g}^k\,\frac{\partial}{\partial x^k} = {}'\mathbf{g}^{\,l}\,\frac{\partial x^k}{\partial \xi^{\,l}}\,\frac{\partial}{\partial x^k} = {}'\mathbf{g}^{\,l}\,\frac{\partial}{\partial \xi^{\,l}}\,,$$

ami azt jelenti, hogy valódi vektor a nabla operátor.

8.2.2. Gradiens, divergencia, rotáció. A nabla operátor felhasználásával a (8.17) összefüggés koordinátairánytól független, azaz tetszőleges $\Delta\mathbf{r}$-re érvényes módon a

$$\mathrm{D}\mathfrak{A}[\Delta\mathbf{r}] = (\mathfrak{A}\otimes\nabla)\cdot\Delta\mathbf{r} \tag{8.19}$$

alakban írható fel, ahol

$$\mathfrak{A}\otimes\nabla \Longrightarrow \begin{cases} \varphi\nabla & \text{ha az } \mathfrak{A} \text{ skalár, ezt } \varphi \text{ jelöli} \\ \mathbf{v}\otimes\nabla & \text{ha az } \mathfrak{A} \text{ vektor, ezt } \mathbf{v} \text{ jelöli} \\ \boldsymbol{T}\otimes\nabla & \text{ha az } \mathfrak{A} \text{ tenzor, ezt } \boldsymbol{T} \text{ jelöli} \end{cases} \tag{8.20a}$$

az $\mathfrak{A}$ jobboldali gradiense.

Az $\mathfrak{A}$ baloldali gradiensét, a fentiekhez hasonló módon az

$$\nabla\otimes\mathfrak{A} \Longrightarrow \begin{cases} \nabla\varphi = \varphi\nabla \\ \nabla\otimes\mathbf{v} \\ \nabla\otimes\boldsymbol{T} \end{cases} \tag{8.20b}$$

alakokkal értelmezzük.

A jobboldali gradienssel

$$\mathrm{D}\mathfrak{A}[\Delta\mathbf{r}] = \Delta\mathbf{r}\cdot(\nabla\otimes\mathfrak{A}) \tag{8.21}$$

az $\mathfrak{A}$ tenzor lineáris része a P pont környezetében.

Első, vagy magasabbrendű tenzor esetén az

$$\mathfrak{A}\cdot\nabla \Longrightarrow \begin{cases} \mathbf{v}\cdot\nabla \\ \boldsymbol{T}\cdot\nabla \\ \cdots \end{cases} \qquad \text{és} \qquad \nabla\cdot\mathfrak{A} \Longrightarrow \begin{cases} \nabla\cdot\mathbf{v} \\ \nabla\cdot\boldsymbol{T} \\ \cdots \end{cases} \tag{8.22}$$

képletek értelmezik a jobboldali és baloldali divergenciát.

Első, vagy magasabbrendű tenzor esetén az

$$\mathfrak{A}\times\nabla \Longrightarrow \begin{cases} \mathbf{v}\times\nabla \\ \boldsymbol{T}\times\nabla \\ \dots \end{cases} \qquad \text{és} \qquad \nabla\times\mathfrak{A} \Longrightarrow \begin{cases} \nabla\times\mathbf{v} \\ \nabla\times\boldsymbol{T} \\ \dots \end{cases} \tag{8.23}$$

képletek értelmezik a tenzor jobb-, és baloldali rotációját.

Valamely tenzor gradiense, divergenciája, rotációja eggyel magasabbrendű, eggyel alacsonyabb rendű, ugyanolyan rendű tenzor, mint az eredeti tenzor.

8.3. Kovariáns derivált

8.3.1. Vektormező gradiense és divergenciája görbevonalú KR-ben. Tekintsük az $\mathbf{u}=u^k\,\mathbf{g}_k$ vektormezőt. A bázisvektorok deriválásával kapcsolatos (8.4) összefüggést kihasználva, majd alkalmasan nevezve át a néma indexeket, írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x^l} = \mathbf{u}_{,l} = u^k{}_{,l}\,\mathbf{g}_k + u^k\mathbf{g}_{k,l} = u^k{}_{,l}\,\mathbf{g}_k + u^k\Gamma^s_{kl}\,\mathbf{g}_s = \\ = \left[u^k{}_{,l} + u^s\Gamma^k_{sl}\right]\mathbf{g}_k\,. \end{aligned} \tag{8.24}$$

Az utóbbi képlet alapján az

$$\boxed{u^k{}_{;l} = u^k{}_{,l} + u^s\Gamma^k_{sl}} \tag{8.25}$$

másodrendű tenzort az u^k kontravariáns vektor *kovariáns deriváltjának* nevezzük. Az $u^k{}_{;l}$ kovariáns derivált az $\mathbf{u}$ vektor x^l szerinti parciális deriváltjának $\mathbf{g}_k$ irányú vektorkoordinátája.

A kovariáns deriváltat itt, és a továbbiakban is, pontosvessző után álló és a deriválási változót azonosító alsó index jelöli.

A bevezetett jelöléssel átírható a (8.25) összefüggés:

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x^l} = \mathbf{u}_{,l} = u^k{}_{;l}\,\mathbf{g}_k\,. \tag{8.26}$$

Ennek az egyenletnek az alapján adódik, hogy

$$\mathbf{u}\otimes\nabla = \mathbf{u}\otimes\frac{\partial}{\partial x^l}\mathbf{g}^l = \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x^l}\otimes\mathbf{g}^l = u^k{}_{;l}\,\mathbf{g}_k\otimes\mathbf{g}^l \tag{8.27a}$$

a jobboldali, és

$$\nabla\otimes\mathbf{u} = \mathbf{g}^l\frac{\partial}{\partial x^l}\otimes\mathbf{u} = \mathbf{g}^l\otimes\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x^l} = u^k{}_{;l}\,\mathbf{g}^l\otimes\mathbf{g}_k \tag{8.27b}$$

a baloldali gradiens.

Ha az $u_k\,\mathbf{g}^k$ alakban adott az $\mathbf{u}$ vektormező, akkor a (8.25)-ra vezető gondolatmenet ismétlésével és a felsőindexes bázisvektorok deriváltját adó (8.9) képlet felhasználásával kapjuk a vektormező jobboldali gradiensére az

$$\begin{aligned} \mathbf{u}\otimes\nabla = u_k\,\mathbf{g}^k\otimes\frac{\partial}{\partial x^l}\mathbf{g}^l = \left(\frac{\partial}{\partial x^l}u_k\,\mathbf{g}^k\right)\otimes\mathbf{g}^l = \\ = \left[u_{k,l}\,\mathbf{g}^k + u_k\,\mathbf{g}^k{}_{,l}\right]\otimes\mathbf{g}^l = \left[u_{k,l}\,\mathbf{g}^k - u_k\,\Gamma^k_{sl}\,\mathbf{g}^s\right]\otimes\mathbf{g}^l = \\ = \left[u_{k,l} - u_s\,\Gamma^s_{kl}\right]\mathbf{g}^k\otimes\mathbf{g}^l\,, \end{aligned} \tag{8.28}$$

vagy ami ugyanaz az

$$\mathbf{u}\otimes\nabla = u_{k;l}\,\mathbf{g}^k\otimes\mathbf{g}^l \tag{8.29}$$

képletet, ahol

$$\boxed{u_{k\,;l} = u_{k\,,l} - u_s\,\Gamma^{\,s}_{kl}} \tag{8.30}$$

az u_l kovariáns vektor kovariáns deriváltja.

A (8.25) és (8.30) képletekből az is látszik, hogy egy vektor kontravariáns és kovariáns koordinátáinak kovariáns deriváltjai nem azonosak. (Lásd még a 8.3.2. alszakaszt.)

Az $\mathbf{u}$ vektor divergenciája az $\mathbf{u}$ és a ∇ skaláris szorzata. A (8.25), (8.27a), valamint a (8.29) és (8.30) képletek felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot\nabla = \nabla\cdot\mathbf{u} &= u^{k}{}_{;l}\,\mathbf{g}_k\cdot\mathbf{g}^l = u^{k}{}_{;l}\,\delta_k{}^l = u^{k}{}_{;k} = u^{k}{}_{,k} + u^s\Gamma^{\,k}_{sk} = \\ &= u_{k\,;l}\,\mathbf{g}^k\cdot\mathbf{g}^l = u_{k\,;l}\,g^{kl} = g^{kl}\;(u_{k\,,l} - u_k\,\Gamma^{\,s}_{kl})\;.\end{aligned} \tag{8.31}$$

8.3.2. Tenzor gradiense és divergenciája görbevonalú KR-ben. Tekintsük a $\boldsymbol{T} = t^{kl}\,\mathbf{g}_k\otimes\mathbf{g}_l$ másodrendű tenzort. A tenzor jobboldali gradiensének számítása a (8.24), (8.25)-re vezető lépésekkel történhet:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}\otimes\nabla &= \left[\frac{\partial}{\partial x^m}\left(t^{kl}\,\mathbf{g}_k\otimes\mathbf{g}_l\right)\right]\otimes\mathbf{g}^m = \\ &= \left[t^{kl}{}_{,m}\,\mathbf{g}_k\otimes\mathbf{g}_l + t^{kl}\mathbf{g}_{k\,,m}\otimes\mathbf{g}_l + t^{kl}\mathbf{g}_k\otimes\mathbf{g}_{l\,,m}\right]\otimes\mathbf{g}^m = \\ &= \left[t^{kl}{}_{,m}\,\mathbf{g}_k\otimes\mathbf{g}_l + t^{kl}\Gamma^{\,s}_{km}\,\mathbf{g}_s\otimes\mathbf{g}_l + t^{kl}\mathbf{g}_k\otimes\Gamma^{\,s}_{lm}\,\mathbf{g}_s\right]\otimes\mathbf{g}^m = \\ &= \left[t^{kl}{}_{,m} + \Gamma^{\,k}_{sm}\,t^{sl} + \Gamma^{\,l}_{sm}\,t^{ks}\right]\;\mathbf{g}_k\otimes\mathbf{g}_l\otimes\mathbf{g}^m \\ &= t^{kl}{}_{;m}\,\mathbf{g}_k\otimes\mathbf{g}_l\otimes\mathbf{g}^m\;,\end{aligned} \tag{8.32}$$

ahol

$$\boxed{t^{kl}{}_{;m} = t^{kl}{}_{,m} + \Gamma^{\,k}_{sm}\,t^{sl} + \Gamma^{\,l}_{sm}\,t^{ks}} \tag{8.33}$$

a t^{kl} másodrendű tenzor kovariáns deriváltja. A (8.33) vezető átalakítások lépéseivel kapjuk, hogy a $t^{k}{}_{l}$, $t_k{}^l$ vegyes indexes, valamint a t_{kl} kovariáns alaknak rendre

$$\boxed{\begin{aligned} t^{k}{}_{l\,;m} &= t^{k}{}_{l\,,m} + \Gamma^{\,k}_{sm}\,t^{s}{}_{l} - \Gamma^{\,s}_{lm}\,t^{k}{}_{s}\;, \\ t_k{}^{l}{}_{;m} &= t_k{}^{l}{}_{,m} - \Gamma^{\,s}_{km}\,t_s{}^{l} + \Gamma^{\,l}_{ms}\,t_k{}^{s}\;, \\ t_{kl\,;m} &= t^{kl\,,m} - \Gamma^{\,s}_{km}\,t_{sl} - \Gamma^{\,s}_{lm}\,t_{ks} \end{aligned}} \tag{8.34}$$

a kovariáns deriváltja.

A $\boldsymbol{T}$ tenzor jobboldali divergenciája a $(8.22)_2$, a (8.32), valamint a (8.33) egybevetése alapján a

$$\boldsymbol{T}\cdot\nabla = t^{kl}{}_{;m}\,\mathbf{g}_k\otimes\underbrace{\mathbf{g}_l\cdot\mathbf{g}^m}_{\delta_l{}^m} = t^{km}{}_{;m}\,\mathbf{g}_k \tag{8.35a}$$

illetve a bázisvektor elhagyásával és a kovariáns derivált részletezésével a

$$t^{km}{}_{;m} = t^{km}{}_{,m} + \Gamma^{\,k}_{sm}\,t^{sm} + \Gamma^{\,m}_{sm}\,t^{ks} \tag{8.35b}$$

alakban írható fel.

Ha egyenesvonalúvá válik az eredetileg görbevonalú (x) KR, akkor állandóak a $\mathbf{g}_k$, $\mathbf{g}^l$ bázisvektorok, következésképp eltűnnek a Christoffel szimbólumok. A kovariáns deriválásokkal kapcsolatos (8.25), (8.30), (8.33) és (8.34) képletek pedig a szokványos parciális deriválásokra egyszerűsödnek.

Legyen differenciálható a $d^k{}_{lp}\,\mathbf{g}_k\otimes\mathbf{g}^l\otimes\mathbf{g}^p$ harmadrendű tenzor. A (8.4), (8.9) felhasználásával ismételve meg a (8.33) és (8.34) képletekre vezető gondolatmenetet a

$$\text{(8.36a)}\quad \left(d^k{}_{lp}\,\mathbf{g}_k\otimes\mathbf{g}^l\otimes\mathbf{g}^p\right)\otimes\nabla = \\ = \left(d^k{}_{lp}\,\mathbf{g}_k\otimes\mathbf{g}^l\otimes\mathbf{g}^p\,\partial_m\right)\otimes\mathbf{g}_m = d^k{}_{lp\,;\,m}\,\mathbf{g}_k\otimes\mathbf{g}^l\otimes\mathbf{g}^p\otimes\mathbf{g}_m$$

eredmény adódik a tenzor jobboldali gradiensére, ahol

$$\text{(8.36b)}\qquad d^k{}_{lp\,;\,m} = d^k{}_{lp\,,\,m} + \Gamma^k_{ms}\,d^s{}_{lp} - \Gamma^s_{lm}\,d^k{}_{sp} - \Gamma^s_{pm}\,d^k{}_{ls}$$

a tenzor kovariáns deriváltja. Nem nehéz meggyőződni arról az eddigiek alapján, hogy a $d^{kl}{}_p$ tenzornak pedig

$$\text{(8.37)}\qquad d^{kl}{}_{p\,;\,m} = d^{kl}{}_{p\,,\,m} + \Gamma^k_{ms}\,d^{sl}{}_p + \Gamma^l_{ms}\,d^{ks}{}_p - \Gamma^s_{pm}\,d^{kl}{}_s$$

a kovariáns deriváltja.

8.3.3. A metrikus és epszilon tenzorok kovariáns deriváltjai. A metrikus tenzorok kovariáns deriváltjai zérus értékűek:

$$\text{(8.38)}\qquad g^{kl}{}_{;\,m} = 0\,,\qquad \delta^k{}_{l\,;\,m} = 0\,,\qquad g_{kl\,;\,m} = 0\,.$$

A fenti egyenletek közül csak az elsőt igazoljuk mivel a másik két esetben is hasonlóan kell eljárni. Első lépésben felírjuk a (8.33) alapján a kovariáns deriváltat, majd helyettesítjük a metrikus tenzor (2.3b) alatti definícióját, és elvégezzük a kovariáns derivált első tagja esetén, kihasználva a bázisvektorok deriváltjaival kapcsolatos (8.9) összefüggést a parciális deriválásokat:

$$\text{(8.39)}\quad g^{kl}{}_{;\,m} = g^{kl}{}_{,\,m} + \Gamma^k_{ms}\,g^{sl} + \Gamma^l_{ms}\,g^{ks} = \mathbf{g}^k{}_{,\,m}\cdot\mathbf{g}^l + \mathbf{g}^k\cdot\mathbf{g}^l{}_{,\,m} + \Gamma^k_{ms}\,g^{sl} + \Gamma^l_{ms}\,g^{ks} = \\ = -\Gamma^k_{ms}\,\mathbf{g}^s\cdot\mathbf{g}^l - \Gamma^l_{ms}\,\mathbf{g}^s\cdot\mathbf{g}^k + \Gamma^k_{ms}\,g^{sl} + \Gamma^l_{ms}\,g^{ks} = 0\,.$$

Ugyancsak zérus értékűek az epszilon tenzorok

$$\text{(8.40)}\qquad \varepsilon^{pqr}{}_{;\,m} = 0\,,\qquad\qquad \varepsilon_{klr\,;\,m} = 0$$

kovariáns deriváltjai.

Az alábbiak csak a $(8.40)_1$ összefüggést igazolják. Legyen az $\mathbf{a} = a_p\mathbf{g}^p$ és $\mathbf{b} = b_q\mathbf{g}^q$ tetszőleges, de állandó vektor, melyre $|\mathbf{a}|\neq 0$, $|\mathbf{b}|\neq 0$ és $\mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$. Mivel állandó az $\mathbf{a} = a_p\mathbf{g}^p$ és $\mathbf{b} = b_q\mathbf{g}^q$ vektor zérus a kovariáns deriváltjuk:

$$a_{p\,;\,m} = 0\,,\qquad\qquad b_{q\,;\,m} = 0\,.$$

Képezzük, kihasználva, hogy a szorzatderiválás szabálya a kovariáns deriváltak esetén is érvényes, a két vektor $c^r = \varepsilon^{pqr}\,a_p\,b_q$ vektoriális szorzatának kovariáns deriváltját. Mivel állandó a $\mathbf{c}$ vektor, fenn kell állnia a

$$c^r{}_{;\,m} = \left(\varepsilon^{pqr}\,a_p\,b_q\right)_{;\,r} = \\ = \varepsilon^{pqr}{}_{;\,m}\,a_p\,b_q + \varepsilon^{pqr}\,\underbrace{a_{p\,;\,m}}_{0}\,b_q + \varepsilon^{pqr}\,a_p\,\underbrace{b_{q\,;\,m}}_{0} = \underline{\varepsilon^{pqr}{}_{;\,m}\,a_p\,b_q} = 0$$

egyenletnek. Az aláhúzott tag csak akkor tűnik el tetszőleges a_p és b_q esetén, ha

$$\varepsilon^{pqr}{}_{;\,m} = 0\,.$$

Ezt kellett igazolni.

A (8.38) és (8.40) összefüggések következménye, hogy nincs hatással a kovariáns derivált értékére a képletekben megjelenő metrikus, vagy epszilon tenzor. Ha az $\boldsymbol{A}$ másodrendű tenzor akkor fennáll például, hogy

$$(g^{kl}\,a_{ls})_{\,;\,m} = g^{kl}\,a_{ls\,;\,m} \qquad (g_{mn}\,a^{m}{}_{s})_{\,;\,r} = g_{mn}\,a^{m}{}_{s\,;\,r} \tag{8.41a}$$

és

$$(\varepsilon^{pqr}\,a_{rs})_{\,;\,m} = \varepsilon^{pqr}\,a_{rs\,;\,m} \qquad (\varepsilon_{klr}\,a^{r}{}_{s})_{\,;\,n} = \varepsilon_{klr}\,a^{r}{}_{s\,;\,n} \tag{8.41b}$$

stb., ahol a_{ls} és $a^{r}{}_{s}$ az $\boldsymbol{A}$ tenzor kovariáns, illetve kontravariáns-kovariáns koordinátái.

Vagy pl. a $\boldsymbol{T}$ tenzor jobboldali divergenciája a (8.35b) összefüggés alapján az alábbi módon is felírható:

$$t^{km}{}_{;\,m} = (t^{k}{}_{p} g^{pm})_{;m} = t^{k}{}_{p\,;\,m} g^{pm}\,. \tag{8.41c}$$

8.3.4. Vektormező rotációja. A Laplace operátor. Az $\mathbf{u}$ vektor jobboldali $\mathbf{u}\times\nabla$ rotációjára a (8.28) és (8.29) felhasználásával az

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\times\nabla &= u_{k}\,\mathbf{g}^{k}\times\frac{\partial}{\partial x^{l}}\,\mathbf{g}^{l} = \\ &= \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x^{l}} u_{k}\,\mathbf{g}^{k}\right)}_{u_{k\,;\,l}\,\mathbf{g}^{k}}\times\mathbf{g}^{l} = u_{k\,;\,l}\,\mathbf{g}^{k}\times\mathbf{g}^{l} = \varepsilon^{klr}\,u_{k\,;\,l}\,\mathbf{g}_{r}\end{aligned} \tag{8.42}$$

eredményt kapjuk.

A Laplace operátort a (8.31) segítségével kapjuk, meg ha u_k helyére $\phi_{\,,\,k}$-t gondolunk, ahol ϕ egy skalármező:

$$\triangle\phi = \nabla\cdot\nabla\phi = \left(\mathbf{g}^{l}\,\frac{\partial}{\partial x^{l}}\right)\cdot\left(\mathbf{g}^{k}\frac{\partial\phi}{\partial x^{k}}\right) = \mathbf{g}^{l}\cdot\mathbf{g}^{k}\,(\phi_{\,,\,k})_{\,;\,l} = g^{kl}\,(\phi_{\,,\,k})_{\,;\,l}\,, \tag{8.43a}$$

ahol

$$(\phi_{\,,\,k})_{\,;\,l} = \phi_{\,,\,kl} - \Gamma^{s}_{kl}\,\phi_{\,,\,s}\,. \tag{8.43b}$$

Ugyanígy mutatható meg, hogy a

$$\triangle u_{k} = g^{rs} u_{k\,;\,rs} \tag{8.44}$$

kifejezésben

$$g^{rs}\,(\cdots)_{\,;\,rs} \tag{8.45}$$

a Laplace operátor, amely működtethető bármilyen tenzorra.

8.4. A Riemann-Christoffel-féle görbületi tenzor

8.4.1. A deriválások sorrendje. A Riemann-Christoffel-féle görbületi tenzor fogalmának bevezetéséhez vizsgáljuk meg a kovariáns deriválások sorrendjében bekövetkező változások hatását. Legyen az a_m a hely függvényében legalább kétszer differenciálható vektormező. Vizsgáljuk meg miként számítható a

$$D_{mqp} = a_{m\,;\,qp} - a_{m\,;\,pq} \tag{8.46}$$

különbség, ha elvégezzük a kijelölt deriválásokat. A $(8.34)_3$ deriválási szabály alkalmazásával – $a_{m;q}$ felel meg t_{kl}-nek – a kisebbítendőre nézve az

$$a_{m\,;\,qp} = (a_{m\,;\,q})_{\,,p} - \Gamma^{s}_{mp}\,a_{s\,;\,q} - \Gamma^{s}_{qp}\,a_{m\,;\,s}$$

eredmény következik. Felcserélve a q és p indexek sorrendjét a kivonandót kapjuk, mellyel azonnal számítható a különbség:

$$
\begin{aligned}
(8.47)\quad D_{mqp} &= (a_{m\,;\,q})_{\,,p} - (a_{m\,;\,p})_{\,,q} - \Gamma^{\,s}_{\,mp}\, a_{\,s\,;\,q} - \Gamma^{\,s}_{\,mq}\, a_{\,s\,;\,p} = \\
&= \left(a_{m\,,\,q} - \Gamma^{\,s}_{\,mq}\, a_{\,s}\right)_{\,,\,p} - \left(a_{m\,,\,p} - \Gamma^{\,s}_{\,mp}\, a_{\,s}\right)_{\,,\,q} - \\
&- \Gamma^{\,s}_{\,mp}\left(a_{s\,,\,q} - \Gamma^{\,r}_{\,sq}\, a_{\,r}\right) + \Gamma^{\,s}_{\,mq}\left(a_{s\,,\,p} - \Gamma^{\,r}_{\,sp}\, a_{\,r}\right) = \\
&= \left\{\partial_q \Gamma^{\,l}_{\,mp} - \partial_p \Gamma^{\,l}_{\,mq} + \Gamma^{\,l}_{\,qs}\Gamma^{\,s}_{\,pm} - \Gamma^{\,l}_{\,ps}\Gamma^{\,s}_{\,qm}\right\}\, a_{\,l}\,.
\end{aligned}
$$

Tömör alakban

$$
(8.48)\qquad a_{m\,;\,qp} - a_{m\,;\,pq} = R^{\,l}_{\,mqp}\, a_{\,l}\,,
$$

ahol

$$
(8.49)\qquad \boxed{R^{\,l}_{\,mqp} = \partial_q \Gamma^{\,l}_{\,mp} - \partial_p \Gamma^{\,l}_{\,mq} + \Gamma^{\,l}_{\,qs}\Gamma^{\,s}_{\,pm} - \Gamma^{\,l}_{\,ps}\Gamma^{\,s}_{\,qm}}
$$

az ún. Riemann-Christoffel-féle görbületi tenzor. Vegyük észre, hogy $R^{\,l}_{\,mqp}$ formailag egyszer kontravariáns, háromszor kovariáns negyedrendű tenzor. Visszaidézve, hogy a Christoffel szimbólumok a metrikus tenzorból képezhetők – v.ö.: (8.11) –, azonnal adódik a következtetés, hogy $R^{\,l}_{\,mqp}$ független az $a_{\,l}$ vektormezőtől. Az is kiolvasható a (8.49) egyenletből, hogy csak akkor cserélhető fel a kovariáns deriválások sorrendje, ha azonosan zérus a Riemann-Christoffel tenzor.

Ha az $a_{\,l}$ valódi vektor, akkor az $a_{m\,;\,qp}$ és $a_{m\,;\,pq}$ kovariáns deriváltak valódi tenzorok. Mivel két valódi tenzor különbsége ugyancsak valódi tenzor, a (8.49) baloldala, következésképp a jobboldal is valódi tenzor. Ha a (8.49) jobboldala valódi tenzor – ne feledjük, hogy az $a_{\,l}$ valódi vektor –, akkor az $R^{\,l}_{\,mqp}$ Riemann-Christoffel tenzor ugyancsak is valódi tenzor. Következőleg követi kontravariáns indexe, és kovariáns indexei tekintetében is az (5.3) alatti szabályt. Fenn kell tehát állnia a

$$
(8.50)\qquad R^{\,l}_{\,mqp} = {}'R^{\,z}_{\,u\,v\,w}\,\frac{\partial x^{\,l}}{\partial y^{\,z}}\,\frac{\partial y^{\,u}}{\partial x^{\,m}}\,\frac{\partial y^{\,v}}{\partial x^{\,q}}\,\frac{\partial y^{\,w}}{\partial x^{\,p}}
$$

egyenletnek. Mivel az (y) kartéziuszi KR-ben a bázisvektorok deriváltjai és így a Christoffel szimbólumok is azonosan zérusok következik (8.49)-ből, hogy ${}'R^{\,z}_{\,u\,v\,w} = 0$. Ez viszont a (8.50) szerint azt eredményezi, hogy

$$
(8.51)\qquad R^{\,l}_{\,mqp} = 0\,.
$$

Szavakban: *A Riemann-Christoffel-féle görbületi tenzor azonosan zérus a háromméretű euklideszi térben. A kovariáns deriválások sorrendje pedig felcserélhető.*

8.4.2. A Riemann-Christoffel tenzor tulajdonságai. Az alábbiak a tenzor legfontosabb tulajdonságait veszik sorra. A tenzor alsóindexes alakja indexsüllyesztéssel adódik a (8.49)-ből:

$$
(8.52)\qquad R_{lmqp} = g_{ls}\, R^{\,s}_{\,mqp}\, a_{\,l} = \left(\Gamma^{\,s}_{\,mp}\partial_q\right)\, g_{\,sl} - \left(\Gamma^{\,s}_{\,mq}\partial_p\right)\, g_{\,sl} + \Gamma^{\,s}_{\,mp}\,\Gamma_{\,sq\,,\,l} - \Gamma^{\,s}_{\,mq}\,\Gamma_{\,sp\,,\,l}\,.
$$

Az R_{lmqp} alkalmas alakra történő transzformálása érdekében a

$$
\partial_q \Gamma_{\,mp\,,\,l} = \partial_q\left(\Gamma^{\,s}_{\,mp}\, g_{\,sl}\right) = \left(\Gamma^{\,s}_{\,mp}\,\partial_q\right)\, g_{\,sl} + \Gamma^{\,s}_{\,mp}\left(g_{\,sl}\,\partial_q\right)
$$

egyenletbe helyettesítjük a (2.3a) és (8.4) összefüggések felhasználásával adódó

$$
(g_{\,sl})_{\,,\,q} = \mathbf{g}_{\,s\,,\,q}\cdot\mathbf{g}_{\,l} + \mathbf{g}_{\,s}\cdot\mathbf{g}_{\,l\,,\,q} = \Gamma_{qs\,,\,l} + \Gamma_{ql\,,\,s}
$$

képletet és kifejezzük az eredményből a $\left(\Gamma^{\,s}_{\,mp}\partial_q\right)\, g_{\,sl}$ tenzort:

$$
(8.53)\qquad \left(\Gamma^{\,s}_{\,mp}\,\partial_q\right)\, g_{\,sl} = \partial_q\,\Gamma_{mp\,,\,l} - \Gamma^{\,s}_{\,mp}\left(\Gamma_{qs\,,\,l} + \Gamma_{ql\,,\,s}\right)\,.
$$

A (8.52) összefüggés, valamint a (8.53)-ból a q és p indexek felcserélésével adódó képlet (8.51)-ba helyettesítésével és alkalmas indexsüllyesztéssel az

$$R_{lmqp} = \partial_q \Gamma_{mp,l} - \partial_p \Gamma_{mq,l} - \\ - \Gamma^s_{mp} (\Gamma_{sq,l} + \Gamma_{lq,s}) + \Gamma^s_{mq} (\Gamma_{sp,l} + \Gamma_{lp,s}) + \Gamma^s_{mp} \Gamma_{sq,l} - \Gamma^s_{mq} \Gamma_{sp,l} = \\ = \partial_q \Gamma_{mp,l} - \partial_p \Gamma_{mq,l} + g^{sk} \left(\Gamma^s_{mp} \Gamma_{sq,l} - \Gamma^s_{mq} \Gamma_{sp,l} \right)$$

eredményt kapjuk. Az utóbbi egyenlet jobboldalának első két tagja átalakítható a (8.11) képlet segítségével:

$$\partial_q \Gamma_{pm,l} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 g_{ml}}{\partial x^q \partial x^p} + \frac{\partial^2 g_{pl}}{\partial x^q \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{pm}}{\partial x^q \partial x^l} \right] ,$$

$$\partial_p \Gamma_{qm,l} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 g_{ml}}{\partial x^p \partial x^q} + \frac{\partial^2 g_{ql}}{\partial x^p \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{qm}}{\partial x^p \partial x^l} \right] .$$

A kapott képletekkel

$$\boxed{\begin{aligned} R_{lmqp} = & \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 g_{lp}}{\partial x^m \partial x^q} + \frac{\partial^2 g_{mq}}{\partial x^l \partial x^p} - \frac{\partial^2 g_{lq}}{\partial x^m \partial x^p} - \frac{\partial^2 g_{mp}}{\partial x^l \partial x^q} \right] + \\ & + g^{sk} \left(\Gamma^s_{mp} \Gamma_{sq,l} - \Gamma^s_{mq} \Gamma_{sp,l} \right) \end{aligned}} \tag{8.54}$$

a Riemann-Christoffel tenzor értéke.

Kiolvasható a (8.54) összefüggésből, hogy

$$R_{lmqp} = -R_{mlqp} , \qquad R_{lmqp} = -R_{lmpq} . \tag{8.55}$$

Ez azt jelenti, hogy a Riemann-Christoffel tenzor ferdeszimmetrikus az első és második indexpárja tekintetében. Az indexpárok cseréje viszont nincs hatással a tenzor értékére, azaz

$$R_{lmqp} = -R_{qplm} . \tag{8.56}$$

Ugyancsak a (8.54) közvetlen helyettesítésével ellenőrizhető, hogy

$$R_{lmqp} + R_{lpqm} + R_{lqmp} = 0 . \tag{8.57}$$

A tenzor összesen 81 eleme közül csak

$$R_{1212} , \ R_{1313} , \ R_{2323} , \ R_{1213} , \ R_{2123} \text{ és } R_{3132}$$

nem azonosan zérus és független.

8.5. Görbe menti kovariáns derivált

8.5.1. A derivált értelmezése. Legyen

$$\mathbf{r} = y^k \left[x^1(t), x^2(t), x^3(t) \right] \mathbf{i}_k \qquad t \in [t_1, t_2] \ \ t_2 > t_1 \tag{8.58}$$

a szakaszonként sima $\mathcal{L}$ térgörbe egyenlete, ahol t a görbe paramétere. Tekintettel arra, hogy ismeretek az $y^k(x^1, x^2, x^3)$ függvények, azt is mondhatjuk, hogy

$$x^k = x^k(t)$$

az $\mathcal{L}$ térgörbe egyenlete az (x) görbevonalú KR-ben.

A továbbiak az $\mathcal{L}$ térgörbe sima íveire vonatkoznak.

Legyen

$$v^k = \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t} . \tag{8.59}$$

Az $\mathbf{r}(t)$ vektor t szerinti deriváltja az $\mathcal{L}$ térgörbe érintője. Az (1.40) és (8.59) összefüggések felhasználásával írható, hogy

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}x^k}\,\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t} = v^k\,\mathbf{g}_k\,. \tag{8.60}$$

Legyen az $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(x^1,x^2,x^3)$ differenciálható tenzormező. Az általánosság megszorítás nélkül feltételezhetjük, hogy az $\boldsymbol{A}$ tenzor q-adrendű ($q\geq 1$) az $\mathcal{L}$ térgörbén (és annak környezetében). Az $\boldsymbol{A}$ tenzormező t paraméter szerinti deriváltja az $\mathcal{L}$ térgörbén, tekintettel a (8.59), (1.40) és (8.18) képletekre

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial x^p}\frac{\mathrm{d}x^p}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial x^p}\,v^p = \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial x^r}\,\delta^r{}_p\,v^p = \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial x^r}\,\mathbf{g}^r\cdot\mathbf{g}_p\,v^p = (\boldsymbol{A}\otimes\nabla)\cdot\mathbf{v}$$

alakú. Ha $q=1$, akkor vektor az $\boldsymbol{A}$ tenzor. Tegyük fel, hogy ez az eset forog fenn, és gondoljunk $a^k\,\mathbf{g}_k$-t az $\boldsymbol{A}$ helyére. A (8.59), (8.25) és (8.26) összefüggések felhasználásával, az utóbbi képlet esetén a^k-t gondolva az u^k helyére, adódik, hogy

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\mathbf{a}}{\partial x^p}\frac{\mathrm{d}x^p}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\mathbf{a}}{\partial x^p}\,v^p = \left[\frac{\partial}{\partial x^p}\left(a^k\,\mathbf{g}_k\right)\right]\,v^p = \tag{8.61}$$

$$= \mathbf{g}_k\,\left(a^k{}_{,p}+\Gamma^k_{ps}a^s\right)\,v^p = \mathbf{g}_k\,a^k{}_{;p}\,v^p\,.$$

Ha $q=2$, akkor másodrendű tenzor az $\boldsymbol{A}$. Tételezzük fel, hogy $\boldsymbol{A}=a^{kl}\,\mathbf{g}_k\otimes\mathbf{g}_l$. A (8.61) összefüggésre vezető gondolatmenet lépéseivel, ezúttal a (8.32) alapján írható

$$\frac{\partial}{\partial x^p}\,a^{kl}\,\mathbf{g}_k\otimes\mathbf{g}_l = \left(a^{kl}{}_{,m}+\Gamma^k_{sm}\,a^{sl}+\Gamma^l_{sm}\,a^{ks}\right)\,\mathbf{g}_k\otimes\mathbf{g}_l$$

képletet és a (8.33)-et használva fel a

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} = v^p\,\frac{\partial}{\partial x^p}\,\left(a^{kl}\,\mathbf{g}_k\otimes\mathbf{g}_l\right) = \tag{8.62}$$

$$= \left(a^{kl}{}_{,p}+\Gamma^k_{ps}\,a^{sl}+\Gamma^l_{ps}\,a^{ks}\right)\,v^p\,\mathbf{g}_k\otimes\mathbf{g}_l = a^{kl}{}_{;p}\,v^p\,\mathbf{g}_k\otimes\mathbf{g}_l$$

eredmény következik.

A (8.61)-ből kiolvasható, hogy a

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}t} = a^k{}_{;p}\,v^p\,\mathbf{g}_k \tag{8.63}$$

paraméter szerinti görbe menti derivált

$$v^p\,a^k{}_{;p} = \left(a^k{}_{,p}+\Gamma^k_{ps}\,a^s\right)\,v^p$$

vektorkoordinátája abban különbözik a formailag vektornak vehető

$$\frac{\mathrm{d}a^k}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial a^k}{\partial x^p}\,\frac{\mathrm{d}x^p}{\mathrm{d}t} = a^k{}_{,p}\,v^p \tag{8.64}$$

deriválttól, hogy az utóbbi deriváltban nincs figyelembe véve, hogy $\mathcal{L}$ térgörbe mentén nemcsak az a^k, hanem a $\mathbf{g}_k$ bázisvektor is változik.

Bevezetjük, felhasználva a (8.5.1) és (8.64) képleteket is az értelmezéshez, a *t paraméter szerinti abszolút, vagy belső derivált fogalmát*, melyet vektormező esetén az

$$\boxed{\frac{\delta a^k}{\delta t} = \frac{\mathrm{d}a^k}{\mathrm{d}t}+v^p\,\Gamma^k_{ps}a^s} \tag{8.65}$$

egyenlet értelmez.

Vegyük észre, hogy a fenti definíció akkor is használható, ha az a^k vektormező csak a $\mathcal{L}$ térgörbén ismert. Ha az $\boldsymbol{A}$ tenzormező nemcsak az $\mathcal{L}$ térgörbén, hanem az $\mathcal{L}$ térgörbe

környezetében is adott és differenciálható – ez a (8.61) és a (8.62) levezetése során hallgatólagos feltevés volt –, akkor $\mathbf{a}$ deriválható az x^p szerint és így a (8.65) jobboldala a (8.64) és (8.61) egybevetése alapján átalakítható:

$$\boxed{\frac{\delta a^{\,k}}{\delta t} = v^p \left(a^{\,k}{}_{,p} + \Gamma^{\,k}_{ps} a^{\,s}\right) = v^p\, a^{\,k}{}_{;p}\,.} \tag{8.66}$$

Másként fogalmazva, ha a differenciálható $\boldsymbol{A}$ tenzormező ismeretes az $\mathcal{L}$ térgörbe környezetében is, akkor a $\delta(\cdots)/\delta t$ operátor a

$$\frac{\delta}{\delta t}(\cdots) = v^p (\cdots)_{;p} \tag{8.67}$$

egyenlettel értelmezhető.

Ha az $\boldsymbol{A}$ másodrendű tenzor csak az $\mathcal{L}$ térgörbén van értelmezve, akkor a (8.65) definíciónak a (8.62) összefüggésből adódóan a

$$\boxed{\frac{\delta a^{\,kl}}{\delta t} = \frac{\mathrm{d}a^{\,kl}}{\mathrm{d}t} + v^p\, \Gamma^{\,k}_{\,ps}\, a^{\,sl} + v^p\, \Gamma^{\,l}_{\,ps}\, a^{\,ks}} \tag{8.68}$$

egyenlet az analogonja.

Könnyen belátható, hogy a (8.67) alatti értelmezés nemcsak vektormezőre, hanem bármilyen rendű tenzormezőre is érvényes feltéve, hogy a tenzor nemcsak az $\mathcal{L}$ térgörbén, hanem annak környezetében is ismert. Ha zérusrendű a tenzor, azaz skalárról van szó, akkor

$$\frac{\delta}{\delta t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,.$$

Nem nehéz belátni, hogy a tenzorok abszolút deriváltjaira érvényes a szorzatderiválás szabálya. A $g^{\,kl}$, $\delta^{\,k}_{\,l}$, $g_{\,kl}$ metrikus, valamint az $\varepsilon^{\,pqr}$ és $\varepsilon_{\,klr}$ epszilon tenzorok abszolút deriváltjai zérus értékűek.

8.5.2. A térgörbe geometriájának elemei. A $\mathrm{d}\mathbf{r}$ ívelemvektor

$$ds^2 = (\mathrm{d}\mathbf{r})^2 = \mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} \tag{8.69}$$

négyzete egyben az elemi ívhossz négyzete is. A $(4.17)_2$, valamint a (2.3a) összefüggések felhasználásával a fenti képletből az

$$ds^2 = g_{\,kl}\,\mathrm{d}x^{\,k}\,\mathrm{d}x^{\,l} = g_{\,kl}\,\frac{\mathrm{d}x^{\,k}}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}x^{\,l}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t^{\,2} \tag{8.70}$$

eredmény következik. Eszerint az $\mathcal{L}$ térgörbe $\mathfrak{l}$ hossza integrálással adódik:

$$\mathfrak{l} = \int_{t^1}^{t^2} \sqrt{g_{\,kl}\,\frac{\mathrm{d}x^{\,k}}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}x^{\,l}}{\mathrm{d}t}}\,\mathrm{d}t = \int_{t^1}^{t^2} \sqrt{g_{\,kl}\,v^{\,k}\,v^{\,l}}\,\mathrm{d}t\,. \tag{8.71}$$

Ha a t helyett az s ívkoordinátát tekintjük az $\mathcal{L}$ térgörbe paraméterének és $s(t^1) = 0$, továbbá $s > 0$ ha $t > t^1$, akkor

$$\mathfrak{l} = s\,, \qquad \text{ha } t > t^1\,.$$

A továbbiakban feltételezzük, hogy az s ívkoordináta az $\mathcal{L}$ térgörbe paramétere. A $\boldsymbol{\lambda}$ érintőirányú egységvektor tekintettel az (1.40) összefüggésre a

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}x^{\,k}}\,\frac{\mathrm{d}x^{\,k}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}x^{\,k}}{\mathrm{d}s}\,\mathbf{g}_k \tag{8.72}$$

alakban írható, ahol

$$\lambda^k = \frac{\mathrm{d}x^{\,k}}{\mathrm{d}s} \tag{8.73}$$

az érintőirányú egységvektor kontravariáns vektor koordinátája. Mivel a λ^k egységvektor

$$\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\lambda} = \lambda^k \mathbf{g}_k \cdot \lambda^l \mathbf{g}_l = g_{kl}\,\lambda^k\lambda^l = g_{kl}\,\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s}\,\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}s} = 1 \tag{8.74}$$

Vegyük észre, hogy az utóbbi egyenlet a (8.70) képletből is következik, ha dt helyére ds-t írunk.

Ami az abszolút deriváltakkal kapcsolatos (8.65) és (8.68) összefüggéseket illeti a (8.59) és (8.73) egybevetése után, ds-t írva a dt helyére a

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\delta a^k}{\delta s} &= \frac{\mathrm{d}a^k}{\mathrm{d}s} + v^p\,\Gamma^k_{pm} a^m \\ \frac{\delta a^{kl}}{\delta s} &= \frac{\mathrm{d}a^{kl}}{\mathrm{d}s} + v^p\,\Gamma^k_{pm}\,a^{ml} + v^p\,\Gamma^l_{pm}\,a^{km}\end{aligned}} \tag{8.75}$$

képletek adódnak. Ha az $\boldsymbol{A}$ tenzor az $\mathcal{L}$ térgörbe környezetében is ismert, akkor a (8.67) alapján adódó

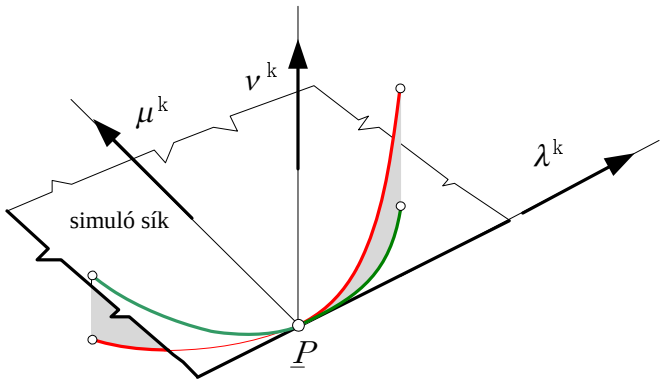
$$\frac{\delta}{\delta s}(\cdots) = \lambda^p (\cdots)_{;p} \tag{8.76}$$

deriválási szabály is alkalmazható.

Ha az n^k vektor merőleges a λ^l érintő egységvektorra, akkor eltűnik a két vektor skaláris szorzata:

$$\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\lambda} = g_{kl}\,n^k\lambda^l = 0\,. \tag{8.77}$$

Az $\mathbf{n}$ vektort a görbe normálisának nevezzük. Ilyen végtelen sok van a görbére merőleges síkban.



8.2. ábra. Érintő, normális, binormális

A (8.74) egyenletben álló kvadratikus tag értéke állandó és egy. Következésképp zérus értékű az abszolút deriváltja:

$$\frac{1}{2}\,\frac{\delta}{\delta s}\left(g_{kl}\,\lambda^k\lambda^l\right) = g_{kl}\,\frac{\delta\lambda^l}{\delta s}\,\lambda^k = 0\,. \tag{8.78}$$

A (8.77) és (8.78) képletek egybevetése szerint a $\delta\lambda^l/\delta s$ vektor az $\mathcal{L}$ térgörbe egyik normálisa. A $\delta\lambda^l/\delta s$ normálissal párhuzamos egységvektort μ^l-el jelöljük és a

$$\boxed{\begin{aligned}\kappa\mu^l &= \frac{\delta\lambda^l}{\delta s}\,, \\ g_{kl}\,\mu^k\mu^l &= 1\,, \qquad \kappa \geq 0\end{aligned}} \tag{8.79}$$

egyenletekkel értelmezzük. A képletekben álló κ az $\mathcal{L}$ térgörbe görbülete. Ez pozitív vagy zérus. A μ^l egységvektor pedig az $\mathcal{L}$ térgörbe ún. *főnormálisa*.

A térgörbe adott pontjában a $\boldsymbol{\lambda}$ érintő és $\boldsymbol{\mu}$ főnormális által kifeszített sík a görbe *simulósíkja*.

A κ görbület reciproka az $\mathcal{L}$ térgörbe R görbületi sugara:

$$R = \frac{1}{\kappa}\,, \qquad R > 0\,. \tag{8.80}$$

Ha a μ^k és λ^l merőlegességét kifejező

$$g_{kl}\,\mu^k\lambda^l = 0 \tag{8.81}$$

szorzat abszolút deriváltját képezzük majd az eredménybe helyettesítjük a

$$g_{kl}\,\mu^k\mu^l = 1 \quad \text{és} \quad g_{kl}\,\lambda^k\lambda^l = 1$$

egyenleteket, akkor a

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{\delta s}\left(g_{kl}\,\mu^k\lambda^l\right) &= g_{kl}\left(\frac{\delta\mu^k}{\delta s}\,\lambda^l + \mu^k\,\frac{\delta\lambda^l}{\delta s}\right) = \\ &= g_{kl}\,\frac{\delta\mu^k}{\delta s}\,\lambda^l + \kappa\,\underbrace{g_{kl}\,\mu^k\mu^l}_{g_{kl}\,\lambda^k\lambda^l} = g_{kl}\lambda^l\,\underbrace{\left(\kappa\,\lambda^k + \frac{\delta\mu^k}{\delta s}\right)}_{b^k} = 0\end{aligned} \tag{8.82}$$

képletet kapjuk. Legyen

$$b^k = \kappa\,\lambda^k + \frac{\delta\mu^k}{\delta s}\,. \tag{8.83}$$

A (8.82) egyenlet szerint b^k és λ^l merőleges egymásra:

$$g_{kl}\,b^k\,\lambda^l = 0\,. \tag{8.84}$$

Vegyük észre, hogy a (8.77) képletre vezető gondolatmenet a $g_{kl}\mu^k\,\mu^l = 1$ szorzatra is alkalmazható. Következésképp fennáll a

$$g_{kl}\,\mu^k\,\frac{\delta\mu^l}{\delta s} = 0 \tag{8.85}$$

egyenlet. Ez azt jelenti, hogy merőlegesek egymásra a μ^k és $\delta\mu^l/\delta s$ vektorok.

A (8.81) és (8.85) képletek felhasználásával azonnal adódik, hogy a b^l vektor a μ^k főnormálisra is merőleges. A (8.83) segítségével valóban írható, hogy

$$g_{kl}\,\mu^k b^l = g_{kl}\,\mu^k\left(\kappa\,\lambda^l + \frac{\delta\mu^l}{\delta s}\right) = \underbrace{\kappa\,g_{kl}\,\mu^k\lambda^l}_{0} + \underbrace{g_{kl}\,\mu^k\,\frac{\delta\mu^l}{\delta s}}_{0} = 0\,,$$

A b^l vektorral párhuzamos $\boldsymbol{\nu}$ egységvektort, mivel mind a $\boldsymbol{\lambda}$ érintő egységvektorra, mind pedig a $\boldsymbol{\mu}$ főnormális egységvektorra merőleges *binormálisnak* nevezzük, és a

$$\nu^l = \epsilon^{lpq}\,\lambda^p\mu^q \tag{8.86}$$

egyenlettel értelmezzük. Ez az egyenlet azt fejezi ki, hogy a λ^p, μ^q és ν^l vektorok jobbsodratú triádot alkotnak, hiszen a (8.86) értelmező egyenlet felhasználásával adódik, hogy

$$\nu_l\nu^l = \epsilon^{lpq}\,\lambda^p\mu^q\nu^l = 1\,. \tag{8.87}$$

A $\boldsymbol{\lambda}$ érintő, a $\boldsymbol{\mu}$ főnormális és a $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\lambda}\times\boldsymbol{\mu}$ binormális alkotta triádot kísérő triédernek szokás nevezni.

A (8.86) és a (8.83) egybevetéséből a

$$b^l = \tau\nu^l = \kappa\lambda^l + \frac{\delta\mu^l}{\delta s}\,,$$

vagy átrendezve a

$$\boxed{\frac{\delta\mu^l}{\delta s} = \tau\nu^{\,l} - \kappa\lambda^l} \tag{8.88}$$

eredményt kapjuk, ahol a $\tau \gtreqless 0$ az $\mathcal{L}$ térgörbe torziója az adott pontban.

További hasznos összefüggés vezethető le, ha a (8.86) egyenlet abszolút deriváltját képezzük, majd helyettesítjük a (8.79) és (8.88) képleteket és kihasználjuk, hogy zérus a párhuzamos vektorok vektoriális szorzata:

$$\frac{\delta\nu^{\,l}}{\delta s} = \varepsilon^{lpq}\,\frac{\delta\lambda_p}{\delta s}\,\mu_q + \varepsilon^{lpq}\,\lambda_p\,\frac{\delta\mu_q}{\delta s} = \kappa\,\varepsilon^{lpq}\,\mu^p\mu^q + \varepsilon^{lpq}\,\lambda_p\,(\tau\nu_q - \kappa\lambda_q) = -\tau\varepsilon^{lqp}\,\nu_q\lambda_p$$

Ha figyelembe vesszük, hogy jobbsodratú triádot alkotnak a ν^q, λ_p és μ^q vektorok a $\varepsilon^{lqp}\,\nu_q\lambda_p$ vektorszorzatra a μ^l érték adódik. Ezzel

$$\boxed{\frac{\delta\nu^{\,l}}{\delta s} = -\tau\mu^l\,.} \tag{8.89}$$

A (8.79) (8.88) és (8.89) képletek az ún. Frenet formulák.

Gyakorlatok

1. Tegyük fel, hogy u^k valódi vektor. Igazolja, hogy ekkor valódi másodrendű tenzor az $u^{\,k}{}_{;\,l}$ kovariáns derivált.
2. Tegyük ismét fel, hogy u^k valódi vektor. Mutassa meg, hogy ekkor valódi skalár az $u^{\,k}{}_{;\,k}$ divergencia.
3. Igazolja, hogy zérus értékűek a $\delta^{\,k}{}_{l\,;\,m}$ és $g_{kl\,;\,m}$ kovariáns deriváltak.
4. Igazolja a (8.39) egyenlet kapcsán részletezett lépésekkel, hogy $\varepsilon^{\,pqr}{}_{;\,m} = 0$.
5. Mutassa meg, kétféleképpen is, hogy $\varepsilon_{\,klr\,;\,m} = 0$.
6. Igazolja, hogy egyenes az $\mathbf{r}(s)$ térgörbe, ha tetszőleges s-re zérus a görbülete, azaz ha $\kappa(s) \equiv 0$.
7. Igazolja, hogy síkgörbe az $\mathbf{r}(s)$ térgörbe, ha tetszőleges s-re zérus a torziója, azaz ha $\tau(s) \equiv 0$.
8. Az y^3 tengelyű csavarvonalnak

$$\mathbf{r} = R\cos\varphi\,\mathbf{i}_1 + R\sin\varphi\,\mathbf{i}_2 + m\varphi\mathbf{i}_3\,, \qquad m \neq 0 \tag{8.90}$$

az egyenlete, amelyben $R > 0$ állandó, és φ a polárszög. Határozza meg a kísérő triédert alkotó $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\mu}$ és $\boldsymbol{\nu}$ vektorokat!

9. FEJEZET

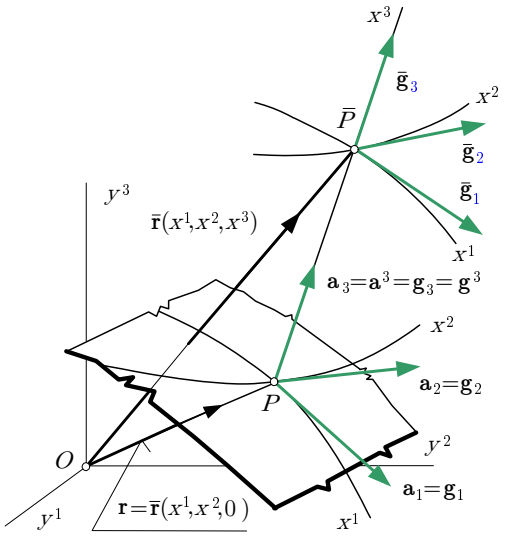
A felületek differenciál-geometriájának alapjai

9.1. A felület geometriája

9.1.1. Görbevonalú KR a felületen és a felület környezetében. Az (y^1, y^2, y^3) kartéziuszi KR-ben egy felület egyenlete kétparaméteres függvény. Az általánosság megszorítása nélkül feltételezhetjük, hogy a vizsgált sima S felület egy (x^1, x^2, x^3) görbevonalú KR $x^3 = 0$ koordinátafelülete; az x^1, x^2 görbevonalú koordináták pedig a felület paraméterei. Az x^1, x^2 koordináták kétdimenziós görbevonalú KR-t, más, gyakori elnevezés szerint *felületi KR-t* alkotnak az S felületen.

Az x^3 koordinátavonalak, feltevés szerint, a felületre merőleges egyenesek, az x^3 koordináta pedig az S felülettől mért előjeles távolság. Az így felépített (x^1, x^2, x^3) görbevonalú KR-t felületre épített térbeli görbevonalú KR-nek, vagy a rövidség kedvéért, követve az eddigi szóhasználatot egyszerűen (x^1, x^2, x^3) térbeli görbevonalú KR-nek nevezzük.

Az $(x^1, x^2, x^3 \neq 0)$ koordinátájú $\bar{P}$ térpontban értelmezett mennyiségeket felülvonással jelöljük és indexeiket kék színnel szedjük. Az S felületen értelmezett mennyiségek esetén nem alkalmazunk megkülönböztető jelölést. Az ún. áthelyező tenzorok esetén (ezek ui. a $\bar{P}$, illetve P ponthoz tartozó kétponttenzorok) az segíti majd az olvasót a megkülönböztetésben, hogy a $\bar{P}$ ponthoz tartozó index kék.



9.1. ábra. Felületre épített KR

Leolvasható a 9.1. ábráról, hogy az S felület tetszőleges P pontjának $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^1, x^2)$ a helyvektora. Legyen az $\mathbf{a}_3$ az S felület normális egységvektora a P pontban:

$$\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_3 = 1 \,. \tag{9.1}$$

A $\bar{P}$ pont helyvektora, tekintettel az x_3 koordináta fenti értelemezésére

$$\bar{\mathbf{r}}(x^1, x^2, x^3) = \mathbf{r}(x^1, x^2) + x^3 \mathbf{a}_3(x^1, x^2) \tag{9.2}$$

alakú.

Az $\mathbf{r}(x_1, x_2)$ helyvektor ismeretében a $\bar{P}$ pontbeli kovariáns bázisvektorok az (1.40) képlet alapján deriválásokkal kaphatók meg:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{g}}_\alpha &= \bar{\mathbf{r}}_{,\alpha} = \mathbf{r}_{,\alpha} + x^3 \mathbf{a}_{3,\alpha} \,, \\ \bar{\mathbf{g}}_3 &= \bar{\mathbf{r}}_{,3} = \mathbf{a}_3 \,. \end{aligned} \tag{9.3}$$

Vegyük észre, hogy a (9.1) és $(9.3)_1$ képletekből adódóan

$$\bar{\mathbf{g}}_3 \cdot \bar{\mathbf{g}}_3 = \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_3 = 1 \,, \tag{9.4}$$

ahonnan x^α szerinti deriválással

$$\bar{\mathbf{g}}_{3,\alpha}\cdot\bar{\mathbf{g}}_3=\mathbf{a}_{3,\alpha}\cdot\mathbf{a}_3=0 \tag{9.5a}$$

adódik. Ez egyben azt is jelenti, hogy a

$$\bar{\mathbf{g}}_{3,\alpha}=\mathbf{a}_{3,\alpha} \tag{9.5b}$$

vektor merőleges a $\bar{\mathbf{g}}_3$ bázisvektorra. Ha emellett azt is figyelembe vesszük, hogy $\mathbf{r}_{,\alpha}\cdot\mathbf{a}_3=0$ ($\mathbf{r}_{,\alpha}$ a felület érintősíkjában fekszik, $\mathbf{a}_3$ a normális), akkor kapjuk, hogy

$$\bar{g}_{3\alpha}=\bar{g}_{\alpha 3}=\bar{\mathbf{g}}_3\cdot\bar{\mathbf{g}}_\alpha=\bar{\mathbf{g}}_3\cdot(\mathbf{r}_{,\alpha}+x^3\mathbf{a}_{3,\alpha})=\mathbf{a}_3\cdot(\mathbf{r}_{,\alpha}+x^3\mathbf{a}_{3,\alpha})=0 \tag{9.6}$$

A (9.4) és (9.6) képletekből azonnal következik, hogy

$$[\bar{g}_{kl}]=[\bar{\mathbf{g}}_k\cdot\bar{\mathbf{g}}_l]=\begin{bmatrix}\bar{g}_{11}&\bar{g}_{12}&0\\ \bar{g}_{21}&\bar{g}_{22}&0\\ 0&0&1\end{bmatrix} \tag{9.7}$$

a kovariáns metrikus tenzor szerkezete a $\bar{P}$ pontban.

A $\bar{\mathbf{g}}^k$ kontravariáns bázisvektorok az (1.25a), $(1.27)_1$ és (3.15a) képletek alapján számíthatók. Ha egy index 3, akkor a másik két index csak az 1,2 értékeket veheti fel ezért kapjuk, hogy

$$\bar{\mathbf{g}}_\alpha\times\bar{\mathbf{g}}_\beta=\sqrt{\bar{g}_o}\,e_{\alpha\beta 3}\bar{\mathbf{g}}^3=\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta 3}\bar{\mathbf{g}}^3\,. \tag{9.8a}$$

(A permutációs szimbólum és a Kronecker delta értékkészlete KR független, ezért esetükben nem alkalmazzuk a felülvonást). Innen

$$\bar{\mathbf{g}}_1\times\bar{\mathbf{g}}_2=\sqrt{\bar{g}_o}\,e_{123}\bar{\mathbf{g}}^3\,, \tag{9.8b}$$

amelyben a vektorszorzat nyilvánvalóan merőleges az S felületre. Következésképp

$$\bar{\mathbf{g}}^3=\frac{1}{\sqrt{\bar{g}_o}}\,\bar{\mathbf{g}}_1\times\bar{\mathbf{g}}_1=\lambda\,\mathbf{a}_3\,. \tag{9.9}$$

Itt a λ egyelőre ismeretlen paraméter. Ugyanakkor, tekintettel a $(9.3)_2$, (9.9) és (9.1) összefüggésekre

$$1=\delta_3{}^3=\bar{\mathbf{g}}_3\cdot\bar{\mathbf{g}}^3=\lambda\,\mathbf{a}_3\cdot\mathbf{a}_3$$

ahonnan $\lambda=1$, következésképp

$$\bar{\mathbf{g}}^3=\bar{\mathbf{g}}_3=\mathbf{a}^3=\mathbf{a}_3\,. \tag{9.10}$$

A $\bar{\mathbf{g}}^1$ és $\bar{\mathbf{g}}^2$ bázisvektorok a (9.9)-re vezető gondolatmenet ismétlésével és a (9.10) felhasználásával adódnak:

$$\bar{\mathbf{g}}_\alpha\times\bar{\mathbf{g}}_3=\bar{\varepsilon}_{\alpha 3\beta}\bar{\mathbf{g}}^\beta\,, \tag{9.11}$$

$$\bar{\mathbf{g}}^1=\frac{1}{\sqrt{\bar{g}_o}}\,\bar{\mathbf{g}}_2\times\bar{\mathbf{g}}_3=\frac{1}{\sqrt{\bar{g}_o}}\,\bar{\mathbf{g}}_2\times\mathbf{a}_3\,,\quad \bar{\mathbf{g}}^2=\frac{1}{\sqrt{\bar{g}_o}}\,\bar{\mathbf{g}}_3\times\bar{\mathbf{g}}_1=\frac{1}{\sqrt{g_o}}\,\mathbf{a}_3\times\bar{\mathbf{g}}_1\,. \tag{9.12}$$

Az utóbbi egyenletből, tekintettel a (9.10)-re, azonnal következik, hogy a $\bar{\mathbf{g}}^1$ és $\bar{\mathbf{g}}^2$ merőleges a $\bar{\mathbf{g}}^3=\mathbf{a}_3$ vektorra – $\mathbf{a}_3$ a felület normális egységvektora – és így

$$\begin{aligned}\bar{g}^{33}&=\bar{\mathbf{g}}^3\cdot\bar{\mathbf{g}}^3=\mathbf{a}_3\cdot\mathbf{a}_3=1\,,\\ \bar{g}^{3\alpha}&=\bar{g}^{\alpha 3}=\bar{\mathbf{g}}^3\cdot\bar{\mathbf{g}}^\alpha=0\,.\end{aligned} \tag{9.13}$$

Ez az eredmény azt jelenti, hogy a kontravariáns metrikus tenzor szerkezete ugyanolyan, mint a kovariáns metrikus tenzoré:

$$[\bar{g}^{kl}]=[\bar{\mathbf{g}}^k\cdot\bar{\mathbf{g}}^l]=\begin{bmatrix}\bar{g}^{11}&\bar{g}^{11}&0\\ \bar{g}^{21}&\bar{g}^{22}&0\\ 0&0&1\end{bmatrix} \tag{9.14}$$

A (9.14) összefüggés abból is következik, hogy $\bar{g}^{kl}$ inverze $\bar{g}_{kl}$-nek.

Az (1.25b), $(1.27)_2$ és (3.15b) összefüggések felhasználásával azonnal adódik, hogy a (9.8a) egyenletnek a

$$\bar{\mathbf{g}}^{\alpha} \times \bar{\mathbf{g}}^{\beta} = \sqrt{\bar{g}^o}\, e^{\alpha\beta 3} \bar{\mathbf{g}}_3 = \bar{\varepsilon}^{\,\alpha\beta 3} \bar{\mathbf{g}}_3 \tag{9.15}$$

képlet, a (9.11)-nek pedig a

$$\bar{\mathbf{g}}^{\alpha} \times \bar{\mathbf{g}}^{3} = \bar{\varepsilon}^{\alpha 3 \beta} \bar{\mathbf{g}}_{\beta} \,, \tag{9.16}$$

az analogonja. A (9.16)-ból, megismételve a (9.12)-ra vezető gondolatmenetet,

$$\bar{\mathbf{g}}_1 = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}^o}}\, \bar{\mathbf{g}}^2 \times \bar{\mathbf{g}}^3 = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}^o}}\, \bar{\mathbf{g}}^2 \times \mathbf{a}^3 \,, \quad \bar{\mathbf{g}}_2 = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}^o}}\, \bar{\mathbf{g}}^3 \times \bar{\mathbf{g}}^1 = \frac{1}{\sqrt{g^o}}\, \mathbf{a}^3 \times \bar{\mathbf{g}}^1 \,. \tag{9.17}$$

következik.

A felület P pontjában az $x^3 = 0$ helyettesítéssel képezhetők a bázisvektorok és metrikus tenzorok. A kovariáns bázisvektorok és a metrikus tenzor a $(9.3)_2, \ldots,(9.7)$ képletek felhasználásával a

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{\alpha} &= \bar{\mathbf{g}}_{\alpha}(x^{\gamma},0) = \mathbf{a}_{\alpha} = \mathbf{r}_{,\,\alpha} \,, \\ \mathbf{g}_3 &= \bar{\mathbf{g}}_3(x^{\gamma},0) \end{aligned} \tag{9.18}$$

$$\begin{aligned} g_{33} &= \bar{g}_{33}(x^{\gamma},0) = a_{33} = 1 \,, \\ g_{\alpha 3} &= g_{3\alpha} = \bar{g}_{3\alpha}(x^{\gamma},0) = a_{\alpha 3} = a_{3\alpha} \,, \\ g_{\alpha\beta} &= \bar{g}_{\alpha\beta}(x^{\gamma},0) = a_{\alpha\beta} \,, \end{aligned} \tag{9.19}$$

alakban írhatók fel, ahol az $\mathbf{a}_{\alpha}$ vektorokat és az $a_{\alpha\beta}$ tenzort rendre a $(9.18)_1$ és $(9.19)_3$ összefüggések értelmezik.

Az $\mathbf{a}_{\alpha}$ vektorok az (x^1, x^2) felületi görbevonalú KR kovariáns bázisvektorai, $a_{\alpha\beta}$ pedig a vonatkozó metrikus tenzor.

A $\bar{P}$ pontbeli kontravariáns bázisvektorok és metrikus tenzor lokalizálás, illetve a (9.12), (9.10), (9.13), (9.14) képletek segítségével kaphatók meg:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^1 = \bar{\mathbf{g}}^1(x^{\gamma},0) = \mathbf{a}^1 &= \frac{1}{\sqrt{g_o}}\, \mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3 = \frac{1}{\sqrt{a_o}}\, \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 \,, \\ \mathbf{g}^2 = \bar{\mathbf{g}}^2(x^{\gamma},0) = \mathbf{a}^2 &= \frac{1}{\sqrt{g_o}}\, \mathbf{g}_3 \times \mathbf{g}_1 = \frac{1}{\sqrt{a_o}}\, \mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1 \,, \\ \mathbf{g}^3 = \bar{\mathbf{g}}^3(x^{\gamma},0) &= \mathbf{a}^3 = \mathbf{a}_3 \,, \end{aligned} \tag{9.20}$$

$$\begin{aligned} g^{33} &= \bar{g}^{33}(x^{\gamma},0) = a^{33} = 1 \,, \\ g^{\alpha 3} = g^{3\alpha} &= \bar{g}^{3\alpha}(x^{\gamma},0) = a^{\alpha 3} = a^{3\alpha} \,, \\ g^{\alpha\beta} &= \bar{g}^{\alpha\beta}(x^{\gamma},0) = a^{\alpha\beta} \,. \end{aligned} \tag{9.21}$$

Itt

$$a_o = g_o = \bar{g}_o(x^{\gamma},0) \,. \tag{9.22}$$

A kontravariáns bázisvektorok a $(35)_1$ szerint, kihasználva a $(9.18)_2$-t és a $(9.21)_1$-et, indexemeléssel is számíthatók:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^3 = \mathbf{g}^3 &= g^{3l}\mathbf{g}_l = a^{33}\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_3 \,, \\ \mathbf{a}^{\alpha} = \mathbf{g}^{\alpha} &= g^{\alpha l}\mathbf{g}_l = g^{\alpha\lambda}\mathbf{g}_{\lambda} = a^{\alpha\lambda}\mathbf{a}_{\lambda} \,. \end{aligned} \tag{9.23}$$

Az $\mathbf{a}^{\alpha}$ vektorok az (x^1, x^2) felületi görbevonalú KR kontravariáns bázisvektorai, $a^{\alpha\beta}$ pedig a vonatkozó kontravariáns metrikus tenzor.

Az $a_{\alpha\beta}$ és az $a^{\beta\gamma}$ metrikus tenzorok kielégítik a (2.11) egyenlet analogonját:

$$a_{\alpha\beta}a^{\beta\gamma} = \delta_\alpha{}^\beta \,. \tag{9.24}$$

A felületi epszilon tenzort, felhasználva az (1.28a,b), (3.15a,b) és (9.18) összefüggéseket, valamint a permutációs szimbólum 1.2.3. szakaszban adott értelmezését az

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta} &= \varepsilon_{\alpha\beta 3} = \bar{\varepsilon}_{\alpha\beta 3}(x^\gamma,0) = \sqrt{a_o}\, e_{\alpha\beta 3} \,, \\ \varepsilon^{\alpha\beta} &= \varepsilon^{\alpha\beta 3} = \bar{\varepsilon}^{\alpha\beta 3}(x^\gamma,0) = \frac{1}{\sqrt{a_o}}\, e^{\alpha\beta 3} \,, \end{aligned} \tag{9.25}$$

egyenletek definiálják, ahol

$$a^o = \bar{g}^o = g^o(x^\gamma,0) \,. \tag{9.26}$$

Mivel

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta 3} \,, \quad \varepsilon^{\alpha\beta} = \varepsilon^{\alpha\beta 3} \tag{9.27}$$

fennállnak az

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon^{11} = \varepsilon^{22} = 0 \,, \\ &\varepsilon_{12}/\sqrt{a_o} = \varepsilon^{12}\sqrt{a_o} = 1 \,, \qquad \varepsilon_{21}/\sqrt{a_o} = \varepsilon^{21}\sqrt{a^o} = -1 \end{aligned} \tag{9.28}$$

egyenletek.

A

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\lambda\mu}\varepsilon^{\alpha\beta} &= \delta_\lambda{}^\alpha \delta_\mu{}^\beta - \delta_\lambda{}^\beta \delta_\mu{}^\alpha \,, \\ \varepsilon_{\beta\lambda}\varepsilon^{\alpha\lambda} &= \delta_\beta{}^\alpha \,, \qquad \varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon^{\alpha\beta} = 2 \end{aligned} \tag{9.29}$$

összefüggések az (1.29), (1.30a,b) képletek felületi analogonjai. Könnyen belátható a $(9.29)_1$ összefüggés felhasználásával, hogy a felületen tekintett $b_\pi{}^\rho$ másodrendű tenzorok[1] determinánsa a

$$|b_\pi{}^\rho| = \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon_{\lambda\mu}b_\alpha{}^\lambda b_\beta{}^\mu \tag{9.30}$$

módon számítható.

A felületi koordinátarendszer bázisvektorait illetően, tekintettel a (9.8a), (9.15), (9.11), (9.16) egyenletekre, valamint a felületi epszilon tenzor (9.25) alatti értelmezésére, az

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_\alpha \times \mathbf{a}_\beta &= \varepsilon_{\alpha\beta 3}\mathbf{a}^3 = \varepsilon_{\alpha\beta}\mathbf{a}^3 \\ \mathbf{a}^\alpha \times \mathbf{a}^\beta &= \varepsilon^{\alpha\beta 3}\mathbf{a}_3 = \varepsilon^{\alpha\beta}\mathbf{a}_3 \end{aligned} \tag{9.31}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_\alpha \times \mathbf{a}_3 &= \bar{\varepsilon}_{\alpha 3\beta}\mathbf{a}^\beta = \varepsilon_{\beta\alpha}\mathbf{a}^3 \\ \mathbf{a}^\alpha \times \mathbf{a}^3 &= \varepsilon^{\alpha 3\beta}\mathbf{a}_\beta = \varepsilon^{\beta\alpha}\mathbf{a}_3 \end{aligned} \tag{9.32}$$

összefüggések állnak fenn.

9.1.2. Christoffel szimbólumok. A $\bar{g}_{kl}$ metrikus tenzor szerkezetéből – v.ö.: (9.7) – következik, hogy

$$\bar{g}_{3m,p} = 0 \,. \tag{9.33}$$

A (9.33) képlet kihasználásával a (8.9), (8.4), illetve (8.11) összefüggésekből az alábbi egyenletek adódnak a Christoffel szimbólumok számítására:

$$\bar{\Gamma}_{33,p} = \bar{\Gamma}_{3\pi,3} = \bar{\Gamma}_{\pi 3,3} = 0 \,, \tag{9.34}$$

[1] A $b_\pi{}^\rho$ tenzor az ún. görbületi tenzor, melyet csak később a $(9.45)_2$ összefüggéssel értelmezünk.

$$\bar{\Gamma}_{\alpha\beta,3} = \bar{\mathbf{g}}_{\alpha,\beta}\cdot\bar{\mathbf{g}}_3 = -\frac{1}{2}\,\bar{g}_{\alpha\beta,3} = \bar{h}_{\alpha\beta}(x^1,x^2,x^3)\,,$$

$$\bar{\Gamma}_{3\alpha,\beta} = \bar{\mathbf{g}}_{3,\alpha}\cdot\bar{\mathbf{g}}_\beta = \frac{1}{2}\,\bar{g}_{\alpha\beta,3} = -\bar{h}_{\alpha\beta}(x^1,x^2,x^3)\,, \tag{9.35}$$

$$\bar{\Gamma}_{\kappa\lambda,\mu} = \frac{1}{2}\,(\bar{g}_{\lambda\mu,\kappa}+\bar{g}_{\kappa\mu,\lambda}-\bar{g}_{\kappa\lambda,\mu})\,.$$

A $\bar{h}_{\alpha\beta}$ mennyiséget a $(9.35)_1$ egyenlet értelmezi.

Az elvben tizennyolc különböző elsőfajú Christoffel szimbólum közül az az öt, melynek indexei között a hármas legalább kétszer fordul elő – v.ö.: (9.34) – azonosan zérus. A másodfajú Christoffel szimbólumok a (8.5) képlet baloldala segítségével határozhatók meg. A számítások során vegyük figyelembe, hogy a (9.5a) és (9.34) egybevetése alapján

$$\bar{\mathbf{g}}_{3,\alpha}\cdot\bar{\mathbf{g}}_3 = 0\,, \tag{9.36}$$

és hogy

$$\bar{\mathbf{g}}_{3,3} = \mathbf{a}_{3,3} = 0\,, \tag{9.37}$$

hiszen a $\bar{\mathbf{g}}_3 = \mathbf{a}_3$ vektor független az x^3-tól. Nem részletezve az egyszerű átalakításokat a

$$\bar{\Gamma}^{\,p}_{33} = \bar{\Gamma}^{\,3}_{3\pi} = \bar{\Gamma}^{\,3}_{\pi 3} = 0\,, \tag{9.38}$$

$$\bar{\Gamma}^{\,3}_{\alpha\beta} = \bar{\mathbf{g}}_{\alpha,\beta}\cdot\bar{\mathbf{g}}^3 = -\bar{\mathbf{g}}^3{}_{,\alpha}\cdot\bar{\mathbf{g}}_\beta\,,$$

$$\bar{\Gamma}^{\,\mu}_{3\alpha} = \bar{\mathbf{g}}_{3,\alpha}\cdot\bar{\mathbf{g}}^\mu = -\bar{\mathbf{g}}^3{}_{,\alpha}\cdot\bar{\mathbf{g}}^3\,, \tag{9.39}$$

$$\bar{\Gamma}^{\,\mu}_{\alpha\beta} = \bar{\mathbf{g}}_{\alpha,\beta}\cdot\bar{\mathbf{g}}^\mu$$

eredmény adódik, ahol a $(9.39)_{1,2}$ esetén megfelelő indexcserékkel helyettesítettük a (8.10)-et is.

A másodfajú Christoffel szimbólumok indexemeléssel is előállíthatók, ha az elsőfajú Christoffel szimbólumok ismertek. Valóban a (8.7) képletbe helyettesítve a (9.34)-et és kihasználva, hogy a g^{kl} speciális szerkezetű – v.ö.:(9.13) – azonnal megkapjuk (9.38)-at. Ugyanilyen módon, a (9.35) felhasználásával, és az eredmény (9.39)-el történő egybevetésével ellenőrizhető, hogy

$$\bar{\Gamma}^{\,3}_{\alpha\beta} = \bar{\Gamma}_{\alpha\beta,3}\bar{g}^{33} = \bar{h}_{\alpha\beta} = \bar{\mathbf{g}}_{\alpha,\beta}\cdot\bar{\mathbf{g}}^3\,,$$

$$\bar{\Gamma}^{\,\mu}_{3\alpha} = \bar{\Gamma}_{3\alpha,\beta}\bar{g}^{\beta\mu} = -\bar{h}_{\alpha\beta}\bar{g}^{\beta\mu} = -\bar{h}_\alpha{}^\mu = \bar{\mathbf{g}}_{3,\alpha}\cdot\bar{\mathbf{g}}^\mu\,, \tag{9.40}$$

$$\bar{\Gamma}^{\,\mu}_{\alpha\beta} = \bar{\Gamma}_{3\alpha,\rho}\bar{g}^{\rho\mu} = \bar{\mathbf{g}}_{\alpha,\beta}\cdot\bar{\mathbf{g}}^\mu\,.$$

Hasonlóan az elsőfajú Christoffel szimbólumokhoz, azok a másodfajú Christoffel szimbólumok, melyek indexei között a hármas szám kétszer fordul elő zérus értékűek.

A

$$\bar{g}_{\alpha 3} = \bar{\mathbf{g}}_\alpha\cdot\bar{\mathbf{g}}_3 = 0$$

kifejezés x^β szerinti deriválásával a

$$\bar{\mathbf{g}}_{\alpha,\beta}\cdot\bar{\mathbf{g}}_3 + \bar{\mathbf{g}}_\alpha\cdot\bar{\mathbf{g}}_{3,\beta} = 0$$

eredmény következik, ahonnan a (9.10) és a $\bar{\mathbf{g}}_\alpha = \bar{g}_{\alpha\mu}\bar{\mathbf{g}}^\mu$ képlet helyettesítése után, tekintettel a $(9.40)_1$-re, és a $(9.40)_2$-re, a

$$\bar{\Gamma}^{3}_{\alpha\beta} + \bar{g}_{\alpha\mu}\bar{\Gamma}^{\,\mu}_{3\beta} = \bar{h}_{\alpha\beta} - \bar{h}_\beta{}^\mu\bar{g}_{\mu\alpha} = 0 \tag{9.41}$$

összefüggést kapjuk.

A Christoffel szimbólumok felületen vett értékei lokalizálással kaphatók meg a (9.34), (9.35), (9.38) és (9.40) képletekből:

Elsőfajú Christoffel szimbólumok:

$$\boxed{\Gamma_{33,p} = \Gamma_{3\pi,3} = \Gamma_{\pi 3,3} = 0\,,} \tag{9.42}$$

$$
\boxed{\begin{aligned}
&\Gamma_{\alpha\beta,3} = -\frac{1}{2}\ \bar{g}_{\alpha\beta,3}\big|_{x^3=0} = \mathbf{g}_{\alpha,\beta}\cdot\mathbf{g}_3 = \mathbf{a}_{\alpha,\beta}\cdot\mathbf{a}_3 = \bar{h}_{\alpha\beta}(x^\gamma,0) = b_{\alpha\beta}\ ,\\
&\Gamma_{3\alpha,\beta} = \frac{1}{2}\ \bar{g}_{\alpha\beta,3}\big|_{x^3=0} = \mathbf{g}_{3,\alpha}\cdot\mathbf{g}_\beta = \mathbf{a}_{3,\alpha}\cdot\mathbf{a}_\beta = -\bar{h}_{\alpha\beta}(x^\gamma,0) = -b_{\alpha\beta}\ ,\\
&\Gamma_{\kappa\lambda,\mu} = \frac{1}{2}\left(g_{\lambda\mu,\kappa}+g_{\kappa\mu,\lambda}-g_{\kappa\lambda,\mu}\right) = \frac{1}{2}\left(a_{\lambda\mu,\kappa}+a_{\kappa\mu,\lambda}-a_{\kappa\lambda,\mu}\right).
\end{aligned}} \tag{9.43}
$$

Másodfajú Christoffel szimbólumok:

$$
\boxed{\Gamma^p_{33} = \Gamma^3_{3\pi} = \Gamma^3_{\pi 3} = 0\ ,} \tag{9.44}
$$

$$
\boxed{\begin{aligned}
&\Gamma^3_{\alpha\beta} = \bar{h}_{\alpha\beta}(x^\gamma,0) = b_{\alpha\beta} = \mathbf{g}_{\alpha,\beta}\cdot\mathbf{g}^3 = -\mathbf{g}^3{}_{,\alpha}\cdot\mathbf{g}_\beta = \mathbf{a}_{\alpha,\beta}\cdot\mathbf{a}^3 = -\mathbf{a}^3{}_{,\alpha}\cdot\mathbf{a}_\beta\ ,\\
&\Gamma^\mu_{3\alpha} = -\bar{h}_\alpha{}^\mu(x^\gamma,0) = -b_\alpha{}^\mu = \mathbf{g}_{3,\alpha}\cdot\mathbf{g}^\mu = \mathbf{g}^\mu{}_{,\alpha}\cdot\mathbf{g}_3 = \mathbf{a}_{3,\alpha}\cdot\mathbf{a}^\mu = \mathbf{a}^\mu{}_{,\alpha}\cdot\mathbf{a}_3\ ,\\
&\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \Gamma_{3\alpha,\rho}(x^\gamma,0)\bar{g}^{\rho\mu}(x^\gamma,0) = \Gamma^\mu_{\alpha\beta}(x^\gamma,0) = \mathbf{g}_{\alpha,\beta}\cdot\mathbf{g}^\mu = \mathbf{a}_{\alpha,\beta}\cdot\mathbf{a}^\mu\ .
\end{aligned}} \tag{9.45}
$$

Az S felület $b_{\alpha\beta}$ görbületi tenzorát a $(9.43)_1$, vagy a $(9.43)_2$ egyenlet értelmezi [2]. A $b^\mu{}_\alpha$ a görbületi tenzor vegyes indexes alakja. Vegyük észre, hogy $b_{\alpha\beta}$ szimmetrikus az α és β indexekre nézve. A 9.1.3. szakaszban megmutatjuk majd, hogy valódi felületi tenzor az S felületen értelmezett görbületi tenzor.

A $(9.45)_2$ képletből következik, hogy

$$
\Gamma^\nu_{3\alpha}\mathbf{g}_\nu = -b^\nu{}_\alpha\mathbf{g}_\nu = \mathbf{g}_{3,\alpha} = \mathbf{a}_{3,\alpha}\ . \tag{9.46}
$$

A (9.46), (9.3) és a (9.18) egybevetése alapján

$$
\bar{\mathbf{g}}_\alpha = \mathbf{g}_\alpha + x^3\Gamma^\nu_{3\alpha}\mathbf{g}_\nu = \left(\delta_\alpha{}^\nu - x^3 b_\alpha{}^\nu\right)\mathbf{g}_\nu = \left(\delta_\alpha{}^\nu - x^3 b_\alpha{}^\nu\right)\mathbf{a}_\nu\ . \tag{9.47}
$$

Legyen

$$
\boxed{g_\alpha{}^\nu = \delta_\alpha{}^\nu - x^3 b_\alpha{}^\nu\ .} \tag{9.48}
$$

Ennek az összefüggésnek a felhasználásával a (9.47) átírható a

$$
\bar{\mathbf{g}}_\alpha = g_\alpha{}^\nu\mathbf{g}_\nu = g_\alpha{}^\nu\mathbf{a}_\nu \tag{9.49}
$$

alakba. A fenti képlet a P pontbeli $\mathbf{g}_\nu = \mathbf{a}_\nu$ bázisvektorokat, azaz az (x^1, x^2) felületi KR bázisvektorait transzformálja a $\bar{P}$ pontbeli $\bar{\mathbf{g}}_\alpha$ bázisvektorokká. Ezek az $x^3 =$ állandó felületen tekintett bázisvektorok.

Vegyük észre, hogy a $g_\alpha{}^\nu$ tenzor ν indexe az $x^3 = 0$ koordinátafelülethez tartozó, vagy ami ugyanez, az (x^1, x^2) felületi KR-ben tekintett tenzorindex.

9.1.3. Felületi tenzorok. Legyenek ξ^1 és ξ^2 új görbevonalú koordináták az S felületen:

$$
\xi^\alpha = \xi^\alpha(x^1, x^2)\ . \tag{9.50a}
$$

Legyen továbbá

$$
\xi^3 = x^3\ . \tag{9.50b}
$$

Fel fogjuk tételezni, hogy kölcsönösen egyértelmű a (9.50a) függvénykapcsolat, azaz

$$
J_{\xi,x} = \left|\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\beta}\right| \neq 0\ . \tag{9.51}
$$

A (ξ^1, ξ^2, ξ^3) és (x^1, x^2, x^3) felületre épített görbevonalú KR-eket a 9.2. ábra szemlélteti.

[2] A görbületi szó, mint jelző geometriai hátterét a 9.2.2. alszakaszban tekintjük át.

Ha valamely

$$'d^{mnr}{}_{pq} = {}'\bar{d}^{mnr}{}_{pq}(\xi^\gamma,0) \quad \text{és} \quad d^{jkl}{}_{uv} = \bar{d}^{jkl}{}_{uv}(x^\gamma,0)$$

tenzorok

$$'d^{\pi\rho 3}{}_{\nu 3}(\xi^\gamma) = {}'\bar{d}^{\pi\rho 3}{}_{\nu 3}(\xi^\gamma,0) \quad \text{és} \quad d^{\alpha\beta 3}{}_{\sigma 3}(x^\gamma) = \bar{d}^{\alpha\beta 3}{}_{\sigma 3}(x^\gamma,0)$$

részei (altenzorai) követik a koordináta transzformáció során, összhangban az (5.3) képlettel, a

$$d^{\alpha\beta 3}{}_{\sigma 3}(x^\gamma) = {}'d^{\pi\rho 3}{}_{\nu 3}(\xi^\gamma)\frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^\pi}\frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\rho}\frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\sigma} \tag{9.52a}$$

vagy ami ugyanaz a fenti szabály megfordítását jelentő

$${}'d^{\pi\rho 3}{}_{\nu 3}(\xi^\gamma) = d^{\alpha\beta 3}{}_{\sigma 3}(x^\gamma)\frac{\partial \xi^\pi}{\partial x^\alpha}\frac{\partial \xi^\rho}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^\nu} \tag{9.52b}$$

transzformációs törvényt, akkor a vonatkozó

$${}'d^{\pi\rho 3}{}_{\nu 3}(\xi^\gamma) \quad \text{és} \quad d^{\alpha\beta 3}{}_{\sigma 3}(x^\gamma)$$

altenzorok ugyanazon felületi tenzorok. Másként fogalmazva a fenti altenzorok, valódi felületi tenzorok.

A felületen értelmezett mennyiségekre fordítva továbbiakban a figyelmet úgy is fogalmazhatunk (9.52a,b) alapján, hogy

$${}'h^{\pi\rho}{}_{\sigma}(\xi^\gamma) \quad \text{és} \quad h^{\alpha\beta}{}_{\nu}(x^\gamma)$$

ugyanaz a kétszer kontravariáns, egyszer kovariáns felületi tenzor, ha a

$$h^{\alpha\beta}{}_{\nu}(x^\gamma) = {}'h^{\pi\rho}{}_{\sigma}(\xi^\gamma)\frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^\pi}\frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\rho}\frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\nu} \tag{9.53a}$$

vagy ami ezzel ekvivalens, ha a

$${}'h^{\pi\rho}{}_{\sigma}(\xi^\gamma) = h^{\alpha\beta}{}_{\nu}(x^\gamma)\frac{\partial \xi^\pi}{\partial x^\alpha}\frac{\partial \xi^\rho}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^\sigma} \tag{9.53b}$$

egyenletek teljesülnek.

Kimutatható, hogy a

$$g_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} \quad \text{és} \quad g^{\alpha\beta} = a^{\alpha\beta}$$

metrikus tenzorok, együtt a $\delta_\alpha{}^\beta$, $\delta^\beta{}_\alpha$ Kronecker szimbólummal a felületi KR egységtenzorai. A (9.25) képletekkel értelmezett felületi epszilon tenzorok ugyancsak valódi másodrendű tenzorok.

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy a $b_{\alpha\beta}$ görbületi tenzor is valódi másodrendű felületi tenzor. Az átalakítások során szükség lesz a (ξ^1,ξ^2) és (x^1,x^2) felületi görbevonalú KR-ek bázisvektorai között fennálló transzformációs képletekre. Szem előtt tartva, hogy (9.3) (9.18) képletek csak annyiban változnak a (ξ^1,ξ^2,ξ^3) KR-ben, hogy ξ-t kell írni x helyére, továbbá kihasználva, hogy

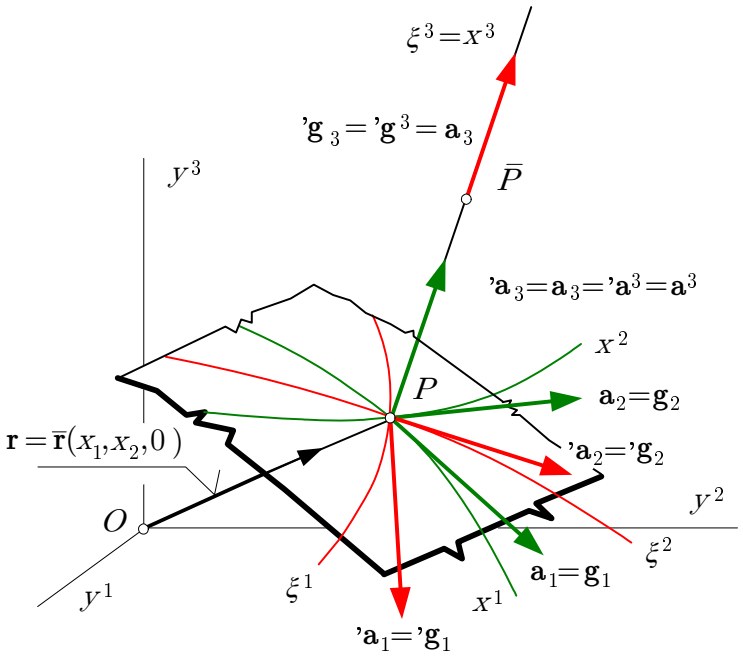
$${}'\xi^3 = x^3 = 0$$

az S felületen írhatjuk, hogy

$${}'\mathbf{g}_\beta = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^\beta} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^\kappa}\frac{\partial x^\kappa}{\partial \xi^\beta} = \frac{\partial x^\kappa}{\partial \xi^\beta}\,\bar{\mathbf{g}}_\kappa \tag{9.54}$$

Következik a (ξ^1,ξ^2,ξ^3) KR értelmezéséből – v.ö.: 9.2. ábra, illetve a jelen szakasz első bekezdése –, hogy

$${}'\mathbf{g}_3 = {}'\mathbf{g}^3 = \mathbf{a}_3\,. \tag{9.55}$$



9.2. ábra. KR-ek a felületen

A (9.43) összefüggés alapján, kihasználva a (9.55)-et is, kapjuk, hogy

$$'b_{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} {}'\mathbf{g}_\beta\right) \cdot {}'\mathbf{g}_3 = \left(\frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} {}'\mathbf{g}_\beta\right) \cdot \mathbf{g}_3$$

a görbületi tenzor a (ξ^1, ξ^2) felületi KR-ben. A (9.54) transzformációs képlet helyettesítése és a szorzatderiválás szabályának alkalmazása után innen a

$$'b_{\alpha\beta} = {}'b_{\beta\alpha} = \left[\frac{\partial}{\partial \xi^\alpha}\left(\frac{\partial x^\kappa}{\partial \xi^\beta}\,\mathbf{g}_\kappa\right)\right] \cdot \mathbf{g}_3 = \frac{\partial x^\kappa}{\partial \xi^\beta}\left(\frac{\partial}{\partial \xi^\alpha}\,\mathbf{g}_\kappa\right) \cdot \mathbf{g}_3 + \frac{\partial^2 x^\kappa}{\partial \xi^\alpha}\,\partial \xi^\beta\,\mathbf{g}_\kappa \cdot \mathbf{g}_3$$

eredmény következik. Utóbbi képlet tovább alakítható, ha

- figyelembe vesszük, hogy a $\mathbf{g}_\kappa$ vektor merőleges a $\mathbf{g}_3$ vektorra és
- kihasználjuk, hogy

$$\frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^\sigma}\frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^\alpha}\,,$$

továbbá, ha

- a (9.43) egyenlet alapján felismerjük, hogy megjelenik a képletben a $b_{\kappa\sigma}$:

$$'b_{\beta\alpha} = \frac{\partial x^\kappa}{\partial \xi^\beta}\frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\,\mathbf{g}_\kappa\right) \cdot \mathbf{g}_3 = \frac{\partial x^\kappa}{\partial \xi^\beta}\frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^\alpha} b_{\kappa\sigma}\,.$$

Összevetve ezt az összefüggést a (9.53b) transzformációs képlettel azonnal adódik a következtetés, hogy a $b_{\alpha\beta}$ görbületi tenzor valódi felületi tenzor.

Mivel valódi tenzorok lineáris kombinációja is valódi tenzor a (9.49) képlettel értelmezett $\mu_\alpha{}^{\bar{\nu}}$ tenzor is valódi tenzor.

9.2. A felület belső geometriája

9.2.1. Meusnier tétele. Az S felületen vett ívelem vektornak nincs $\mathbf{g}_3$ irányú összetevője:

(9.56) $$\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{g}_\alpha \mathrm{d}x^\alpha = \mathbf{a}_\alpha \mathrm{d}x^\alpha\,.$$

A

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{g}_\alpha \mathrm{d}x^\alpha \cdot \mathbf{g}_\beta \mathrm{d}x^\beta = g_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^\alpha \mathrm{d}x^\beta = \\ = g_{11}\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^1 + 2g_{12}\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2 + g_{22}\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^2 \end{aligned}} \tag{9.57}$$

ívelem négyzet az S felület *első alapformája*. A Gauss által bevezetett klasszikus

$$g_{11} = a_{11} = A\,, \qquad g_{12} = a_{12} = B\,, \qquad g_{22} = a_{22} = C$$

jelölésekkel a fenti egyenlet a

$$\mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = A\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^1 + 2B\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2 + C\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^2$$

alakba írható át.

A $(9.43)_2$ képletből következik, hogy

$$\mathbf{g}_{3,\alpha} = -b_{\alpha\beta}\mathbf{g}^\beta \tag{9.58a}$$

azaz, hogy

$$\mathrm{d}\mathbf{g}_3 = \mathbf{g}_{3,\alpha}\mathrm{d}x^\alpha = -b_{\alpha\beta}\mathbf{g}^\beta \mathrm{d}x^\alpha \tag{9.58b}$$

A (9.56) és (9.58b) egyenletek skaláris szorzatát képezve az S felület *második alapformájához* jutunk:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{d}\mathbf{g}_3\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = -b_{\alpha\beta}\mathbf{g}^\beta \mathrm{d}x^\alpha \cdot \mathbf{g}_\gamma \mathrm{d}x^\gamma = -b_{\alpha\beta}\delta^\beta{}_\gamma \mathrm{d}x^\alpha \mathrm{d}x^\gamma = -b_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^\alpha \mathrm{d}x^\beta \\ = -b_{11}\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^1 - 2b_{12}\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2 - b_{22}\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^2 \end{aligned}} \tag{9.59}$$

A Gauss által bevezetett

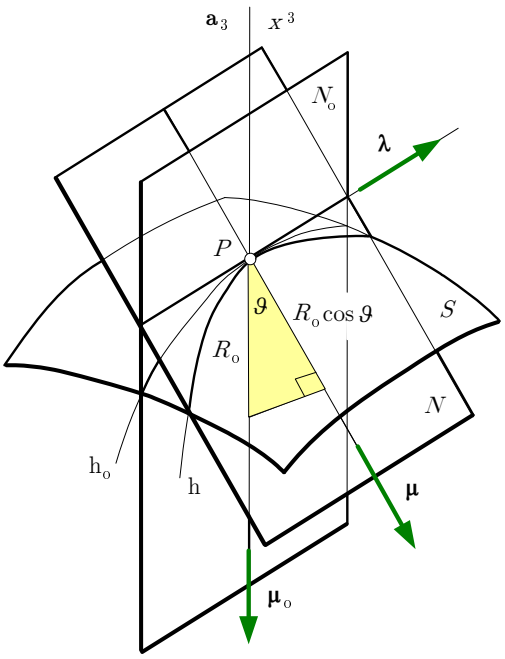
$$b_{11} = D\,, \qquad b_{12} = D'\,, \qquad a_{22} = D''$$

jelölésekkel

$$\mathrm{d}\mathbf{g}_3\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = D\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^1 + 2D'\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2 + D''\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^2$$

a második alapforma alakja.

A 9.3. ábra olyan felületi görbéket szemléltet, ezeket rendre h_o és h jelöli, melyeknek a P pontban közös érintőjük van. Vegyük észre, hogy a h_o görbe



9.3. ábra. Összefüggés görbületek között

az S felület egy normálmetszete, mivel a h_o görbét kimetsző N_o síknak a P pontbeli felületi normális, az x^3 koordinátavonal az egyik tartóegyenese. A h görbe úgy származtatható például, hogy az N_o síkot elforgatjuk a h_o görbe P pontbeli érintője körül, és az elforgatott sík, ezt N jelöli, valamint az S felület metszésvonalát tekintjük.

A következőkben azt a kérdést vizsgáljuk, hogy van-e valamilyen kapcsolat a h_o és h görbék P pontbeli görbületei között.

Legyen $x^\alpha = x^\alpha(s)$ a h görbe egyenlete, ahol s az ívkoordináta. A h görbe érintője a

$$\boldsymbol{\lambda} = \lambda^k \mathbf{g}_k = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^\alpha}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}s}\,\mathbf{g}_\alpha$$

képletből számítható, azaz

$$\lambda^\alpha = \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}s}\,, \qquad \lambda^3 = 0\,. \tag{9.60}$$

A λ^3 koordináta (összetevő) eltűnése azt a nyilvánvaló geometriai tényt fejezi ki, hogy a $\boldsymbol{\lambda}$ érintő egységvektor az S felület érintősíkjában fekszik és így nincs a felület normálisával párhuzamos összetevője.

A h görbe görbülete a (8.79) képlet alapján számítható:

$$\frac{\delta \boldsymbol{\lambda}}{\delta s} = \kappa\,\boldsymbol{\mu}\,, \qquad \kappa \geq 0\,,$$

ahol κ a görbület, a $\boldsymbol{\mu}$ normális pedig a görbe simulósíkjában, ez most az N sík, fekszik. A (8.76) és (8.25) képletek felhasználásával, az utóbbi esetben λ^k–t gondolva u^k helyére, a fenti egyenlet átalakítható:

$$\begin{aligned}\kappa\,\boldsymbol{\mu} = \frac{\delta \lambda^k}{\delta s}\,\mathbf{g}_k = \lambda^p \lambda^k{}_{;p}\,\mathbf{g}_k = \lambda^p\left[\lambda^k{}_{,p} + \Gamma^k_{pr}\lambda^r\right]\mathbf{g}_k = \\ = \lambda^\pi\left[\lambda^\kappa{}_{,\pi} + \Gamma^\kappa_{\pi r}\lambda^r\right]\mathbf{g}_\kappa + \lambda^\pi\left[\lambda^3{}_{,\pi} + \Gamma^3_{\pi r}\lambda^r\right]\mathbf{g}_3\,.\end{aligned}$$

A következő lépésben használjuk ki a $(9.60)_2$ a $(9.45)_1$ összefüggéseket:

$$\kappa\,\boldsymbol{\mu} = \lambda^\pi\left[\lambda^\kappa{}_{,\pi} + \Gamma^\kappa_{\pi r}\lambda^r\right]\mathbf{g}_\kappa + b_{\pi\rho}\lambda^\pi\lambda^\rho\mathbf{g}_3\,. \tag{9.61}$$

A (9.61)-re vezető gondolatmenet a h_o görbe esetére is érvényes. Az eredményt illetően figyelembe kell venni, hogy a $\boldsymbol{\mu}_o$ vektornak nincs az S felület érintősíkjában fekvő összetevője. Következésképp

$$\kappa_o\,\boldsymbol{\mu}_o = b_{\pi\rho}\lambda^\pi\lambda^\rho\bar{\mathbf{g}}_3\,. \tag{9.62}$$

A (9.62) (9.61)-be történő helyettesítésével a

$$\kappa\,\boldsymbol{\mu} = \lambda^p\left[\lambda^\chi{}_{,p} + \Gamma^\chi_{pr}\lambda^r\right]\mathbf{g}_\chi + \kappa_o\,\boldsymbol{\mu}_o$$

képlet adódik. Végigszorozva ezt az egyenletet $\boldsymbol{\mu}_o$-val a

$$\boxed{\kappa\,\cos\vartheta = \kappa_o = \text{állandó}} \tag{9.63}$$

eredményt kapjuk. Szavakban: mindazon felületi görbékre nézve, melyeknek közös az érintőjük a P pontban a $\kappa\,\cos\vartheta$ mennyiség invariáns azaz állandó értékű. Ez Meusnier tétele.

A h és h_o görbék

$$\kappa = \frac{1}{\overset{*}{R}}\,, \qquad \kappa_o = \frac{1}{R_o}$$

egyenletekkel értelmezett görbületi sugarait felhasználva (9.63)-ból az

$$\boxed{\overset{*}{R} = R_o\cos\vartheta} \tag{9.64}$$

összefüggés következik. Az utóbbi képlet szerint $\overset{*}{R}$ egy R_o átfogójú derékszögű háromszög ϑ szög melletti befogója.

Az S felület P pontbeli $\mathbf{g}_3 = \mathbf{a}_3$ normálisára, mint tartóegyenesre illeszkedő N_o, N_o' síksor a h_o, h_o' görbéket metszi ki az S felületből. A h_o, h_o', stb. normálmetszetekhez tartozó $\kappa_{(n)}$ előjeles görbületet a (9.62)egyenlet $\mathbf{a}_3$–al való skaláris átszorzásával kapott

$$\boxed{\kappa_{(n)} = b_{\pi\rho}\lambda^\pi\lambda^\rho} \tag{9.65}$$

egyenlet értelmezi, ahol $\boldsymbol{\lambda}$ a normálmetszetet meghatározó egységvektor (annak érintő vektora), továbbá

– a $\kappa_{(n)} = \kappa_o$ ha $\boldsymbol{\mu}_o \cdot \bar{\mathbf{g}}_3 = \boldsymbol{\mu}_o \cdot \mathbf{a}_3 > 0$

és

– a $\kappa_{(n)} = -\kappa_o$ ha $\boldsymbol{\mu}_o \cdot \bar{\mathbf{g}}_3 = \boldsymbol{\mu}_o \cdot \mathbf{a}_3 < 0$.

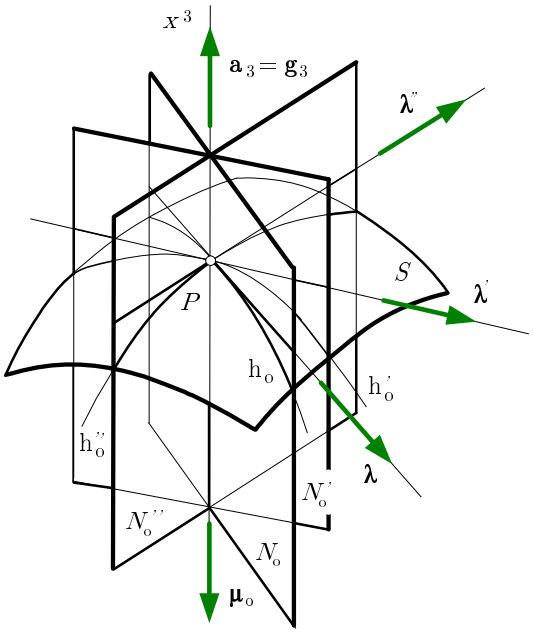
A 9.4. ábrán vázolt esetben $\boldsymbol{\mu}_o \cdot \mathbf{a}_3 < 0$.

9.2.2. Görbületi tenzor. A (9.65) képlet szerint a normál metszet $\kappa_{(n)}$ előjeles görbülete, vagy ami ugyanaz az S felület görbülete a normál metszetben, a P pontbeli érintő egységvektor és a görbületi tenzor kétszeres skaláris szorzata. Ez az a körülmény ami miatt a $b_{\alpha\beta}$ tenzort görbületi tenzornak nevezik.

Az S felület $R_{(n)}$ előjeles görbületi sugarát a felület h_o normál metszetében az

$$\boxed{1/R_{(n)} = -\kappa_{(n)} = -b_{\pi\rho}\lambda^\pi\lambda^\rho} \tag{9.66}$$

egyenlet értelmezi. A negatív előjelnek az a magyarázata, hogy az S felület h_o normál metszetében akkor tekintjük [pozitívnak] {negatívnak} a görbületi sugarat, ha a felület $\mathbf{g}_3 = \mathbf{a}_3$ normálisa a görbületi [középpontól el]{középpont felé} mutat.



9.4. ábra. A felület normálisa körül forgatott síkok és a felület metszetei

Az S felület P pontjában a $\kappa_{(n)}$ előjeles görbület folytonosan változik, ahogy az N_o síkot forgatjuk a felület normálisa körül (kivéve, ha az S felület gömb, vagy sík a P pont környezetében). Úgy is fogalmazhatunk, hogy az előjeles görbület folytonosan változik,

amikor az érintő egységvektor forog a P ponthoz illesztett érintősíkban. Felmerül tehát a kérdés, hogy melyik az a λ^π irány, amelyre nézve szélsőértéke van a normálgörbületnek a

$$\bar{g}_{\pi\rho}\lambda^\pi\lambda^\rho = a_{\pi\rho}\lambda^\pi\lambda^\rho = 1 \tag{9.67}$$

mellékfeltétel fennállása esetén. A kérdés megválaszolása, amint az a kitűnik majd a következő gondolatmenetből, a görbületi tenzor sajátérték feladatára vezet. Ezt azért részletezzük a 6.2. szakasz eredményeire történő részletes hivatkozás helyett, mivel (a) a görbületi tenzor mindössze kétméretű tenzor (b) a gondolatmenet variációs megfontoláson alapul (c) a gondolatmenet megadása önmagában teszi olvashatóvá a jelen fejezetet.

Legyen a χ egyelőre határozatlan Lagrange-féle multiplikátor. A felvetett geometriai probléma az

$$F(\lambda^\rho, \chi) = b_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta - \chi(a_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta - 1) \tag{9.68}$$

funkcionál szélsőértékének meghatározásával ekvivalens. A

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda^\alpha} = (b_{\alpha\beta} - \chi a_{\alpha\beta})\lambda^\beta = (b_\alpha{}^\beta - \chi\delta_\alpha{}^\beta)\lambda_\beta = 0 \tag{9.69}$$

szélsőértékfeltétel homogén lineáris ER a λ_β számítására. Triviálistól különböző megoldás feltétele – ilyen megoldás a (9.67) mellékfeltétel miatt kell, hogy létezzen – a (9.69) ER determinánsának eltűnése:

$$\begin{vmatrix} b_1{}^1 - \lambda & b_1{}^2 \\ b_2{}^1 & b_2{}^2 - \lambda \end{vmatrix} = 0\,. \tag{9.70}$$

Legyen

$$\boxed{B_I = b_\sigma{}^\sigma \qquad \text{és} \qquad B_{II} = |b_\pi{}^\rho| = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon_{\mu\nu}b_\alpha{}^\mu b_\beta{}^\nu .} \tag{9.71}$$

A (9.70) determináns kifejtésével a

$$\boxed{\begin{aligned} &\chi^2 - 2H\chi + K = 0\,, \\ &H = B_I/2\,, \qquad K = B_{II} \end{aligned}} \tag{9.72}$$

másodfokú egyenlet adódik a χ Lagrange-féle multiplikátor számítására. A χ multiplikátor a (9.69) egyenlet λ^α-val történő végigszorzásával és a (9.67) mellékfeltétel kihasználásával kapott

$$b_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta - \chi a_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta = b_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta - \chi = b_\alpha{}^\beta\lambda^\alpha\lambda_\beta - \chi = 0 \tag{9.73}$$

egyenlet szerint, tekintettel a (9.65)-re, a keresett normálmetszetbeli görbület.

A $(9.72)_1$ egyenlet $\chi_{(1)}$ és $\chi_{(2)}$ gyökei a főgörbületek. A gyökök és együtthatók közötti összefüggések szerint

$$\boxed{\chi_{(1)} + \chi_{(2)} = 2H\,, \qquad \chi_{(1)}\chi_{(2)} = K\,,} \tag{9.74}$$

ahol H a középgörbület, míg K, az ún. Gauss-féle görbület, a két főgörbület szorzata.

Ha a $(9.72)_1$ egyenlet gyökei különböznek egymástól, akkor csak egy megoldása van a vizsgált geometriai problémának.

A vonatkozó $\boldsymbol{\lambda}_1$ és $\boldsymbol{\lambda}_2$ vektorok a $b_{\alpha\beta}$ görbületi tenzor főirányait, vagy ami ugyanaz, a felület egymásra kölcsönösen merőleges főmetszeteit jelölik ki. Valóban, ha a $\chi_{(1)}$ és $\chi_{(2)}$ (9.69)-be történő helyettesítésével kapott

$$\begin{aligned} b_{\alpha\beta}\underset{(1)}{\lambda}{}^\beta &= \chi_{(1)}a_{\alpha\beta}\underset{(1)}{\lambda}{}^\beta \\ b_{\alpha\beta}\underset{(2)}{\lambda}{}^\beta &= \chi_{(2)}a_{\alpha\beta}\underset{(2)}{\lambda}{}^\beta \end{aligned} \tag{9.75}$$

egyenleteket rendre végigszorozzuk

$$\underset{(2)}{\lambda}{}^{\alpha} \qquad \text{és} \qquad \underset{(2)}{\lambda}{}^{\alpha}\text{-val}$$

majd pedig a két egyenlet különbségét képezzük – kihasználva eközben, hogy a görbületi és metrikus tenzorok egyaránt szimmetrikusak –, akkor a

$$(\chi_{(1)}-\chi_{(2)})a_{\alpha\beta}\underset{(1)}{\lambda}{}^{\alpha}\underset{(2)}{\lambda}{}^{\beta}=(\chi_{(1)}-\chi_{(2)})\underset{(1)}{\lambda}{}^{\alpha}\underset{(2)}{\lambda}{}_{\alpha}=0 \tag{9.76}$$

eredményre jutunk, ami világosan mutatja, hogy a főirányok kölcsönösen merőlegesek egymásra.

Könnyen igazolható, ismét kihasználva a görbületi és metrikus tenzorok szimmetriáját, hogy a $(9.72)_1$ egyenlet gyökei valósak.

A (9.66) egyenletből adódik, hogy

$$R_{(1)}=-\frac{1}{\chi_{(1)}} \qquad \text{és} \qquad R_{(2)}=-\frac{1}{\chi_{(2)}} \tag{9.77}$$

a főgörbületi sugarak.

A (9.69) egyenlet alapján könnyen belátható, hogy a főgörbületi sugarak a

$$\left|\delta_{\alpha}{}^{\beta}+R_{(n)}b_{\alpha}{}^{\beta}\right|=0 \tag{9.78}$$

egyenlet megoldásai.

A főirányokat mindenütt érintő felületi görbéket *görbületi vonalaknak* szokás nevezni.

Sík és gömbfelületen bármilyen felületi görbe görbületi vonal.

Legyenek különbözőek a $\chi_{(1)}$ és $\chi_{(2)}$ gyökök különbözőek. Legyen továbbá ξ^1,ξ^2 a görbületi vonalak által alkotott felületi KR. Ebben a KR-ben

$$\boldsymbol{\lambda}_1={}'\underset{(1)}{\lambda}{}^{1}\,{}'\mathbf{a}_1 \qquad \text{és} \qquad \boldsymbol{\lambda}_2={}'\underset{(2)}{\lambda}{}^{2}\,{}'\mathbf{a}_2\,, \tag{9.79}$$

ahol az ${}'\mathbf{a}_1$ és ${}'\mathbf{a}_2$ vektorok előjelét úgy szokás megválasztani, hogy együtt az ${}'\mathbf{a}_3=\mathbf{a}_3$ vektorral jobbsodratú KR-t alkossanak. A görbületi vonalak ortogonalitása miatt

$${}'a_{12}={}'a_{21}=0\,. \tag{9.80}$$

A (9.69) egyenlet alapján írható

$$\left({}'b_{\alpha\beta}-\chi_{(1)}{}'a_{\alpha\beta}\right){}'\underset{(1)}{\lambda}{}^{\beta}=0\,.$$

összefüggést végigszorozva ${}'\underset{(1)}{\lambda}{}^{\alpha}$-val, kihasználva továbbá a (9.79) és (9.80) összefüggéseket, a fenti képletből a

$${}'b_{12}={}'b_{21}=0\,. \tag{9.81}$$

eredmény adódik, mivel a görbületi tenzor szimmetrikus.

A (9.80) és (9.81) együttes fennállása esetén a

$$\xi^1=\text{állandó} \qquad \text{és} \qquad \xi^2=\text{állandó}$$

koordinátavonalak görbületi vonalak.

Tekintettel a (9.24) és (9.80) képletekre a görbületi vonalak KR-ében

$${}'\delta_1{}^2={}'a_{11}{}'a^{12}+{}'a_{12}{}'a^{22}={}'a_{11}{}'a^{12}=0$$

ahonnan

$${}'a^{12}={}'a^{21}=0\,. \tag{9.82}$$

hiszen szimmetrikus a felületi metrikus tenzor. Ami a görbületi tenzor vegyes indexes alakját illeti a (9.81) és (9.82) felhasználásával adódik, hogy

$$'b_1{}^2 = {}'b_{11}{}'a^{12} + {}'b_{12}{}'a^{22} = \tag{9.83a}$$

Hasonlóan mutatható ki, hogy

$$'b_2{}^1 = 0\,. \tag{9.83b}$$

A (9.73), (9.79), (9.83a,b) kihasználásával a

$$\chi_{(1)} = {}'b_\alpha{}^\beta\, {}'\underset{(1)}{\lambda}{}^\alpha\, {}'\underset{(1)}{\lambda}{}_\beta = {}'b_1{}^1\, {}'\underset{(1)}{\lambda}{}^1\, {}'\underset{(1)}{\lambda}{}_1 + {}'b_2{}^2\, {}'\underset{(1)}{\lambda}{}^2\, {}'\underset{(1)}{\lambda}{}_2 = {}'b_1{}^1 \tag{9.84a}$$

Ugyanígy mutatható ki, hogy

$$\chi_{(2)} = {}'b_2{}^2\,. \tag{9.84b}$$

A (9.83a,b), (9.84a,b) és (9.66) egybevetéséből:

$$\boxed{\left[{}'b_\alpha{}^\beta\right] = \begin{bmatrix} {}'b_1{}^1 & 0 \\ 0 & {}'b_2{}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_{(1)} & 0 \\ 0 & \chi_{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/R_{(1)} & 0 \\ 0 & -1/R_{(2)} \end{bmatrix}} \tag{9.85}$$

a görbületi tenzor vegyes indexes alakjának szerkezete a görbületi vonalak KR-ében.

Ha

$$K = \chi_{(1)}\chi_{(2)} = \frac{1}{R_{(1)}}\frac{1}{R_{(2)}} = |b_\pi{}^\rho| > 0\,, \tag{9.86}$$

azaz pozitív a Gauss-féle görbület, akkor a $\bar{P}$ pontban azonos a főgörbületek, illetve a görbületi sugarak előjele (mindkét főgörbület negatív, vagy pozitív, illetve mindkét görbületi sugár pozitív, vagy negatív).

A

$$K = 0$$

esetben – egymástól eltérő főgörbületeket tételezve fel – az egyik főgörbület zérus. A vonatkozó főgörbületi sugár pedig végtelen. A másik főgörbület mind pozitív, mind pedig negatív előjelű lehet.

A

$$K < 0$$

esetben a főgörbületek, illetve a főgörbületi sugarak különböző előjelűek.

A fentiekből következik, hogy a zérus görbületű irányokat megadó

$$\kappa = b_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta = b_\alpha{}^\beta\lambda^\alpha\lambda_\beta = 0 \tag{9.87}$$

egyenletnek az irányt kijelölő λ^α vektorra vonatkozóan

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}\text{valósak és különbözőek}\\ \text{valósak és egybeesnek}\\ \text{konjugált komplexek}\end{array}\right\}\ \text{a gyökei, ha}\ \left\{\begin{array}{l}K<0\\ K=0\\ K>0\end{array}\right.}$$

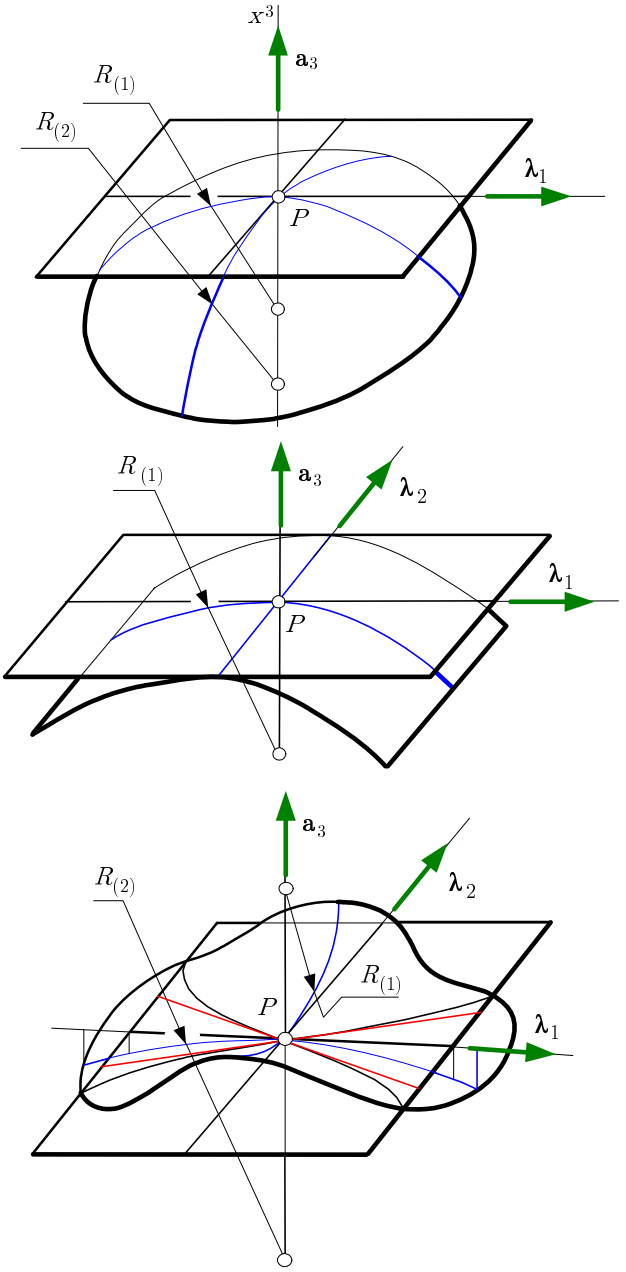
Másként fogalmazva a P pontban és a P elemi környezetében a felület λ^α zérus főgörbületi iránya által kijelölt {normálmetszetei}[normálmetszete]

$$\boxed{\begin{array}{lll}\{\text{ két egyenest alkotnak,} & & K<0\ \}.\\ [\text{ egy egyenes,} & \text{ha} & K=0\ ].\end{array}}$$

A $K > 0$ esetben a P pont környezetében minden normálmetszetben azonos előjelű és zérustól különböző a görbület és így nem létezik egyenes normálmetszet.

A (9.87)-ból adódó irányokat aszimptotikus irányoknak szokás nevezni.

Ismeretes a geometriából, hogy az ellipszoid görbületei azonos előjelűek. Egy parabola esetén a parabola tengelyére és a parabola síkjára merőlegesen történő eltolásával generált hengerfelület alkotói mentén zérus a görbület. A hiperbolikus paraboloid, az ún. nyeregfelület, görbületei pedig különbözőek lehetnek előjelükben.



9.5. ábra. Elliptikus, parabolikus és hiperbolikus pontok a felületen

A fentiek alapján azt mondjuk, hogy a felület

P pontja	elliptikus parabolikus hiperbolikus	}	pont, ha	$K > 0$ (nincs aszimptotikus irány). $K = 0$ (egy aszimptotikus irány). $K < 0$ (két aszimptotikus irány).

A 9.5. ábra az S felület egy-egy elliptikus, parabolikus és hiperbolikus pontját szemlélteti.

9.3. Kovariáns deriválás a felületen

9.3.1. Felületi menti és felületi kovariáns derivált. Legyen $\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}(x^1, x^2, x^3)$ az S felületre épített térbeli görbevonalú KR-ben értelmezett vektormező. Az $\bar{\mathbf{u}}$ vektormező S felületen történő változását az x^α felületi változók szerint vett derivált tükrözi.

A kontravariáns koordinátákkal (összetevőkkel) felírt

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}(x^\gamma,0) = u^\kappa \mathbf{g}_\kappa + u^3 \mathbf{g}_3 = u^\kappa \mathbf{a}_\kappa + u^3 \mathbf{a}_3 \tag{9.88}$$

felbontásból kiindulva, a (8.25) összefüggésre gondolatmenet megismétlésével, továbbá a (9.42), (9.43) képletek felhasználásával az $\mathbf{u}$ vektormező x^α szerinti parciális deriváltjának számítására az

$$\bar{\mathbf{u}}(x^\gamma,0)\partial_\alpha = \mathbf{u}_{,\,\alpha} = u^\kappa{}_{|\alpha}\mathbf{a}_\kappa + u^3{}_{|\alpha}\mathbf{a}_3 \tag{9.89}$$

összefüggést kapjuk, ahol

$$u^\kappa{}_{|\alpha} = u^\kappa{}_{;\,\alpha} = u^\kappa{}_{,\,\alpha} + \Gamma^\kappa_{\alpha\pi}u^\pi + \Gamma^\kappa_{\alpha 3}u^3 = u^\kappa{}_{,\,\alpha} + \Gamma^\kappa_{\alpha\pi}u^\pi - b_\alpha{}^\kappa u^3 \tag{9.90}$$

és

$$u^3{}_{|\alpha} = u^3{}_{;\,\alpha} = u^3{}_{,\,\alpha} + \Gamma^3_{\alpha\beta}u^\beta = u^3{}_{,\,\alpha} + b_{\alpha\beta}u^\beta \tag{9.91}$$

A (9.90) és (9.91) képletek egy jelölésbeli megállapodást is tükröznek. A rövid függőleges vonal után álló görög index ui. azt kívánja hangsúlyozni, hogy itt az S felületen és felületi paraméterek szerint történik a kovariáns deriválás. Ezért ezt a deriváltat *felületi menti kovariáns deriváltnak* nevezzük.

Hasonló módon, a (8.29), (8.30), (9.42) és (9.43) felhasználásával képezhetjük az $\mathbf{u}$ vektormező u_α kovariáns összetevőkkel felírt

$$\bar{\mathbf{u}}(x^\gamma,0) = u_\alpha \mathbf{g}^\alpha + u_3 \mathbf{g}^3 = u_\alpha \mathbf{a}^\alpha + u_3 \mathbf{a}^3 \tag{9.92}$$

alakjának deriváltját az S felületen:

$$\bar{\mathbf{u}}(x^\gamma,0)\partial_\alpha = \mathbf{u}_{,\,\alpha} = u_{\kappa|\alpha}\mathbf{a}^\kappa + u_{3|\alpha}\mathbf{a}_3\ , \tag{9.93}$$

ahol

$$u_{\kappa|\alpha} = u_{\kappa;\,\alpha} = u_{\kappa,\,\alpha} - \Gamma^\pi_{\alpha\kappa}u_\pi - \Gamma^3_{\alpha\kappa}u_3 = u_{\kappa,\,\alpha} - \Gamma^\pi_{\alpha\kappa}u_\pi - b_{\alpha\kappa}u_3 \tag{9.94}$$

és

$$u_{3|\alpha} = u_{3;\,\alpha} = u_{3,\,\alpha} - \Gamma^\beta_{\alpha 3}u_\beta = u_{3,\,\alpha} + b_\alpha{}^\mu u_\mu \tag{9.95}$$

ismét felület menti kovariáns deriváltak.

A (9.90), (9.91), (9.94) és (9.95) deriváltak jobboldalán álló utolsó tag, tekintettel a görbületi tenzor (9.45) alatti értelmezése alapján írható

$$b_{\alpha\beta} = -\mathbf{g}^3{}_{,\,\alpha}\cdot\mathbf{g}_\beta = -\mathbf{a}^3{}_{,\,\alpha}\cdot\mathbf{a}_\beta \tag{9.96a}$$

és

$$b_\alpha{}^\mu = -\mathbf{g}^3{}_{,\,\alpha}\cdot\mathbf{g}^\mu = -\mathbf{a}^3{}_{,\,\alpha}\cdot\mathbf{a}^\mu \tag{9.96b}$$

képletekre, a vonatkozó összetevők S felületre merőleges változásának hatását fejezi ki.

A (9.90), (9.91), (9.94) és (9.95) képletek fennmaradó része a felület érintősíkjában fekvő összetevők felület menti változását jeleníti meg. Mivel az u^3 és u_3 koordináták, vagy összetevők esetén ez az x^α szerinti parciális derivált, úgy is fogalmazhatunk, hogy a felület menti változások szempontjából ezek az mennyiségek skalárként, azaz zérusrendű tenzorként viselkednek.

A (9.90)-re és a (9.94)-re vezető gondolatmenet megismétlésével az $\mathbf{u}$ vektor felület érintősíkjában fekvő összetevőjének x^α szerinti deriváltjára, kihasználva azt, hogy így az

$$u^3 = u_3$$

koordináta összetevő zérusnak tekintett – az

$$[\bar{u}^{\kappa}(x^{\gamma},0)\bar{\mathbf{g}}_{\kappa}(x^{\gamma},0)\partial_{\alpha}] = (u^{\kappa}\mathbf{a}_{\kappa})_{,\,\alpha} = u^{\kappa}{}_{\|\,\alpha}\mathbf{a}_{\kappa}\,,$$

illetve az

$$[\bar{u}_{\kappa}(x^{\gamma},0)\bar{\mathbf{g}}^{\kappa}(x^{\gamma},0)\partial_{\alpha}] = (u_{\kappa}\mathbf{a}^{\kappa})_{,\,\alpha} = u_{\kappa\|\,\alpha}\mathbf{a}^{\kappa}$$

eredmény adódik, ahol

$$\boxed{u^{\kappa}{}_{\|\,\alpha} = u^{\kappa}{}_{,\,\alpha} + \Gamma^{\kappa}_{\alpha\pi}u^{\pi}} \tag{9.97}$$

és

$$\boxed{u_{\kappa\|\,\alpha} = u_{\kappa,\,\alpha} - \Gamma^{\pi}_{\kappa\alpha}u_{\pi}} \tag{9.98}$$

rendre az $\bar{u}^{\kappa}(x^{\gamma},0) = u^{\kappa}(x^{\gamma})$ kontravariáns és az $\bar{u}_{\kappa}(x^{\gamma},0) = u_{\kappa}(x^{\gamma})$ kovariáns altenzorok (vagy az előzőek szerint értelmezett elsőrendű felületi tenzorok, illetve felületi vektorok) ún. *felületi kovariáns deriváltja.*

Amint az fentebb jól látható, a *felületi kovariáns deriváltat* két rövid párhuzamos függőleges vonal után álló görög index jelöli.

Nyilvánvaló, hogy a felületi kovariáns derivált nem tükrözi a felületre merőleges irányban bekövetkező változásokat. Az S felületre merőleges változások hatása – az $\mathbf{a}^{\alpha}$ és $\mathbf{a}_{\beta}$ bázisvektorok megváltozásának van x^3 irányú összetevője – a (9.91) és a (9.95) képletekben jelenik meg, ha ott az

$$u^3 = u_3 = 0$$

helyettesítéssel élünk:

$$u^3{}_{|\,\alpha} = b_{\alpha\beta}u^{\beta} \qquad\qquad u_{3\,|\,\alpha} = b_{\alpha}{}^{\mu}u_{\mu}\,. \tag{9.99}$$

Vegyük észre, hogy az S felület (x^1,x^2) kétméretű terében érvényes (9.97) és (9.98) képletek a háromméretű térben érvényes (8.25) és (8.30) képletek analogonjai, mivel a

$$k \to \kappa\,, \qquad l \to \alpha \qquad \text{és} \qquad\qquad s \to \pi$$

betűcserékkel azonnal megkaphatók a (8.25) és (8.30) képletekből.

A (9.97) és (9.90), valamint a (9.98) és (9.94) egybevetéséből következik, hogy

$$\begin{aligned} u^{\kappa}{}_{|\,\alpha} &= u^{\kappa}{}_{\|\,\alpha} - b_{\alpha}{}^{\kappa}u^3\,,\\ u_{\kappa|\,\alpha} &= u_{\kappa\|\,\alpha} - b_{\kappa\alpha}u_3\,. \end{aligned} \tag{9.100}$$

Az S felületre épített (x^1,x^2,x^3) görbevonalú KR-ben az $\bar{\mathbf{u}}(x^1,x^2,x^3)$ vektormező az x^3 koordinátavonal mentén is változik. Az S felületen az

$$(\bar{\mathbf{u}}\partial_3)\,|_{x^3=0} = \bar{\mathbf{u}}_{,\,3}|_{x^3=0} \tag{9.101}$$

derivált jellemzi a változást. A (9.90), (9.91) és (9.92), valamint a (9.93), (9.94) és (9.95)-ra vezető gondolatmenet megismétlésével az

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}_{,\,3}|_{x^3=0} &= \left(\bar{u}^{\kappa}{}_{;\,3}\bar{\mathbf{g}}_{\kappa} + \bar{u}^{3}{}_{;\,3}\mathbf{g}_3\right)|_{x^3=0} = u^{\kappa}{}_{;\,3}\mathbf{a}_{\kappa} + u^{3}{}_{;\,3}\mathbf{a}_3\,,\\ u^{\kappa}{}_{;\,3} &= u^{\kappa}{}_{,\,3} + \Gamma^{\kappa}_{3\beta}u^{\beta}\,,\\ u^{3}{}_{;\,3} &= u^{3}{}_{,\,3}\,, \end{aligned} \tag{9.102}$$

valamint az

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}_{,\,3}|_{x^3=0} &= \left(\bar{u}_{\kappa;\,3}\bar{\mathbf{g}}^{\kappa} + \bar{u}_{3;\,3}\bar{\mathbf{g}}^{3}\right)|_{x^3=0} = u_{\kappa;\,3}\mathbf{a}^{\kappa} + u_{3;\,3}\mathbf{a}^{3}\,,\\ u_{\kappa\,;\,3} &= u_{\kappa\,,\,3} - \Gamma^{\beta}_{\kappa 3}\bar{u}_{\beta}\,,\\ u_{3\,;\,3} &= u_{3\,,\,3} \end{aligned} \tag{9.103}$$

képleteket kapjuk a (9.101) alatti derivált számítására.

A továbbiakban magasabbrendű tenzorokra általánosítjuk az eddigi eredményeket.

Legyen a $\bar{d}^{k}{}_{lp}(x^1,x^2,x^3)$ differenciálható harmadrendű tenzor. Az S felületen tekintve a tenzor változását a

$$\bar{d}^{k}{}_{lp}(x^\gamma,0)=d^{k}{}_{lp}$$

értékek viselkedését kell vizsgálni. A (8.36b) deriválási képlet alapján a

$$d^{k}{}_{lp|\rho}=d^{k}{}_{lp;\rho}=d^{k}{}_{lp,\,\rho}+\Gamma^{k}_{\rho s}d^{s}{}_{lp}-\Gamma^{s}_{\rho l}d^{k}{}_{sp}-\Gamma^{s}_{\rho p}d^{k}{}_{ls} \tag{9.104}$$

egyenlettel értelmezzük a $\bar{d}^{k}{}_{lp}$ tenzor felület menti kovariáns deriváltját. Ha a $\bar{d}^{k}{}_{lp}$ tenzor valódi tenzor a háromméretű euklideszi térben, akkor a

$$d^{\kappa}{}_{\lambda\pi}\,,\quad d^{3}{}_{\lambda\pi}\,,\quad d^{\kappa}{}_{3\pi}\,,\ldots,d^{3}{}_{33}$$

altenzorok rendre harmad-, másod-, első-, illetve zérusrendű felületi tenzorok, hiszen valamennyien követik a (9.52a,b) transzformációs törvényt. A fenti altenzorok felület menti kovariáns deriváltjai, kihasználva a (9.104), illetve a görbületi tenzorral kapcsolatos (9.44) és (9.45) képleteket, a

$$\begin{aligned}
d^{\kappa}{}_{\lambda\pi|\rho}&=d^{\kappa}{}_{\lambda\pi;\rho}=\\
&=d^{\kappa}{}_{\lambda\pi,\,\rho}+\Gamma^{\kappa}_{\rho\sigma}d^{\sigma}{}_{\lambda\pi}+\Gamma^{\kappa}_{\rho 3}d^{3}{}_{\lambda\pi}-\Gamma^{\sigma}_{\lambda\rho}d^{\kappa}{}_{\sigma\pi}-\Gamma^{3}_{\lambda\rho}d^{\kappa}{}_{3\pi}-\Gamma^{\sigma}_{\pi\rho}d^{\kappa}{}_{\lambda\sigma}-\Gamma^{3}_{\pi\rho}d^{\kappa}{}_{\lambda 3}=\\
&=d^{\kappa}{}_{\lambda\pi,\,\rho}+\Gamma^{\kappa}_{\rho\sigma}d^{\sigma}{}_{\lambda\pi}-\Gamma^{\sigma}_{\lambda\rho}d^{\kappa}{}_{\sigma\pi}-\Gamma^{\sigma}_{\pi\rho}d^{\kappa}{}_{\lambda\sigma}-b_{\rho}{}^{\kappa}d^{3}{}_{\lambda\pi}-b_{\lambda\rho}d^{\kappa}{}_{3\pi}-b_{\pi\rho}d^{\kappa}{}_{\lambda 3}\,,
\end{aligned} \tag{9.105a}$$

$$\begin{aligned}
d^{3}{}_{\lambda\pi|\rho}&=d^{3}{}_{\lambda\pi;\rho}=\\
&=d^{3}{}_{\lambda\pi,\,\rho}+\Gamma^{3}_{\rho\sigma}d^{\sigma}{}_{\lambda\pi}+\Gamma^{3}_{\rho 3}d^{3}{}_{\lambda\pi}-\Gamma^{\sigma}_{\lambda\rho}d^{3}{}_{\sigma\pi}-\Gamma^{3}_{\lambda\rho}d^{3}{}_{3\pi}-\Gamma^{\sigma}_{\pi\rho}d^{3}{}_{\lambda\sigma}-\Gamma^{3}_{\pi\rho}d^{3}{}_{\lambda 3}=\\
&=d^{3}{}_{\lambda\pi,\,\rho}-\Gamma^{\sigma}_{\lambda\rho}d^{3}{}_{\sigma\pi}-\Gamma^{\sigma}_{\pi\rho}d^{3}{}_{\lambda\sigma}+b_{\rho\sigma}d^{\sigma}{}_{\lambda\pi}-b_{\lambda\rho}d^{3}{}_{3\pi}-b_{\pi\rho}d^{3}{}_{\lambda 3}\,,
\end{aligned} \tag{9.105b}$$

$$\begin{aligned}
d^{\kappa}{}_{3\pi|\rho}&=d^{\kappa}{}_{3\pi;\rho}=\\
&=d^{\kappa}{}_{3\pi,\,\rho}+\Gamma^{\kappa}_{\rho\sigma}d^{\sigma}{}_{3\pi}+\Gamma^{\kappa}_{\rho 3}d^{3}{}_{3\pi}-\Gamma^{\sigma}_{3\rho}d^{\kappa}{}_{\sigma\pi}-\Gamma^{3}_{3\rho}d^{\kappa}{}_{3\pi}-\Gamma^{\sigma}_{\rho\pi}d^{\kappa}{}_{3\sigma}-\Gamma^{3}_{\rho\pi}d^{\kappa}{}_{33}=\\
&=d^{\kappa}{}_{3\pi,\,\rho}+\Gamma^{\kappa}_{\rho\sigma}d^{\sigma}{}_{3\pi}-\Gamma^{\sigma}_{\pi\rho}d^{\kappa}{}_{3\sigma}-b_{\rho}{}^{\kappa}d^{3}{}_{3\pi}+b_{\rho}{}^{\sigma}d^{\kappa}{}_{\sigma\pi}-b_{\pi\rho}d^{\kappa}{}_{33}\,,
\end{aligned} \tag{9.105c}$$

$$\begin{aligned}
d^{3}{}_{33|\rho}&=d^{3}{}_{33;\rho}=\\
&=d^{3}{}_{33,\,\rho}+\Gamma^{3}_{\rho\sigma}d^{\sigma}{}_{33}+\Gamma^{3}_{\rho 3}d^{3}{}_{33}-\Gamma^{\sigma}_{3\rho}d^{3}{}_{\sigma 3}-\Gamma^{3}_{3\rho}d^{3}{}_{33}-\Gamma^{\sigma}_{3\rho}d^{3}{}_{3\sigma}-\Gamma^{3}_{3\rho}d^{3}{}_{33}=\\
&=d^{\kappa}{}_{3\pi,\,\rho}+b_{\sigma\rho}d^{\sigma}{}_{33}+b_{\rho}{}^{\sigma}d^{3}{}_{\sigma 3}+b_{\rho}{}^{\sigma}d^{3}{}_{3\sigma}
\end{aligned} \tag{9.105d}$$

módon számíthatók. A $d^{\kappa\lambda}{}_{3}$ kétszer kontravariáns, egyszer kovariáns altenzor tekintetében a fentiekhez hasonlóan mutatható ki a (8.37) képlet alapján, hogy

$$\begin{aligned}
d^{\kappa\lambda}{}_{3|\rho}&=d^{\kappa\lambda}{}_{3;\rho}=\\
&=d^{\kappa\lambda}{}_{3,\,\rho}+\Gamma^{\kappa}_{\rho\sigma}d^{\sigma\lambda}{}_{3}+\Gamma^{\kappa}_{\rho 3}d^{3\lambda}{}_{3}+\Gamma^{\lambda}_{\rho\sigma}d^{\kappa\sigma}{}_{3}+\Gamma^{\lambda}_{\rho 3}d^{\kappa 3}{}_{3}-\Gamma^{\sigma}_{3\rho}d^{\kappa\lambda}{}_{\sigma}-\Gamma^{3}_{3\rho}d^{\kappa\lambda}{}_{3}=\\
&=d^{\kappa\lambda}{}_{3,\,\rho}+\Gamma^{\kappa}_{\rho\sigma}d^{\sigma\lambda}{}_{3}+\Gamma^{\lambda}_{\rho\sigma}d^{\kappa\sigma}{}_{3}-b_{\rho}{}^{\kappa}d^{3\lambda}{}_{3}-b_{\rho}{}^{\lambda}d^{\kappa 3}{}_{3}+b_{\rho}{}^{\sigma}d^{\kappa\lambda}{}_{\sigma}
\end{aligned} \tag{9.105e}$$

a *felület menti kovariáns derivált.*

A $d^{\kappa}{}_{\lambda\pi}$, $d^{3}{}_{\lambda\pi}$, $d^{\kappa}{}_{3\pi}$, $d^{3}{}_{33}$ és $d^{\kappa\lambda}{}_{3}$ altenzorok felületi kovariáns deriváltjai rendre a

$$\boxed{\begin{aligned}
d^{\kappa}{}_{\lambda\pi\|\rho}&=d^{\kappa}{}_{\lambda\pi,\,\rho}+\Gamma^{\kappa}_{\rho\sigma}d^{\sigma}{}_{\lambda\pi}-\Gamma^{\sigma}_{\lambda\rho}d^{\kappa}{}_{\sigma\pi}-\Gamma^{\sigma}_{\pi\rho}d^{\kappa}{}_{\lambda\sigma}\,,\\
d^{3}{}_{\lambda\pi\|\rho}&=d^{3}{}_{\lambda\pi,\,\rho}-\Gamma^{\sigma}_{\lambda\rho}d^{3}{}_{\sigma\pi}-\Gamma^{\sigma}_{\pi\rho}d^{3}{}_{\lambda\sigma}\,,\\
d^{\kappa}{}_{3\pi\|\rho}&=d^{\kappa}{}_{3\pi,\,\rho}+\Gamma^{\kappa}_{\rho\sigma}d^{\sigma}{}_{3\pi}-\Gamma^{\sigma}_{\pi\rho}d^{\kappa}{}_{3\sigma}\,,\\
d^{3}{}_{33\|\rho}&=d^{3}{}_{33,\rho}\,,\\
d^{\kappa\lambda}{}_{3\|\rho}&=d^{\kappa\lambda}{}_{3,\,\rho}+\Gamma^{\kappa}_{\rho\sigma}d^{\sigma\lambda}{}_{3}+\Gamma^{\lambda}_{\rho\sigma}d^{\kappa\sigma}{}_{3}
\end{aligned}} \tag{9.106}$$

egyenletek értelmezik. A (9.106) felületi kovariáns deriváltakat felhasználva a (9.105a, . . . ,e) felület menti kovariáns deriváltak az alábbi alakban írhatók fel:

$$
\begin{aligned}
&d^{\kappa}{}_{\lambda\pi|\rho} = d^{\kappa}{}_{\lambda\pi\|\rho} - b_{\rho}{}^{\kappa} d^{3}{}_{\lambda\pi} - b_{\lambda\rho} d^{\kappa}{}_{3\pi} - b_{\pi\rho} d^{\kappa}{}_{\lambda 3}\,,\\
&d^{3}{}_{\lambda\pi|\rho} = d^{3}{}_{\lambda\pi\|\rho} + b_{\rho\sigma} d^{\sigma}{}_{\lambda\pi} - b_{\lambda\rho} d^{3}{}_{3\pi} - b_{\pi\rho} d^{3}{}_{\lambda 3}\,,\\
&d^{\kappa}{}_{3\pi|\rho} = d^{\kappa}{}_{3\pi\|\rho} - b_{\rho}{}^{\kappa} d^{3}{}_{3\pi} + b_{\rho}{}^{\sigma} d^{\kappa}{}_{\sigma\pi} - b_{\pi\rho} d^{\kappa}{}_{33}\,,\\
&d^{3}{}_{33|\rho} = d^{3}{}_{33\|\rho} + b_{\sigma\rho} d^{\sigma}{}_{33} + b_{\rho}{}^{\sigma} d^{3}{}_{\sigma 3} + b_{\rho}{}^{\sigma} d^{3}{}_{3\sigma}\,,\\
&d^{\kappa\lambda}{}_{3|\rho} = d^{\kappa\lambda}{}_{3\|\rho} - b_{\rho}{}^{\kappa} d^{3\lambda}{}_{3} - b_{\rho}{}^{\lambda} d^{\kappa 3}{}_{3} + b_{\rho}{}^{\sigma} d^{\kappa\lambda}{}_{\sigma}\,.
\end{aligned}
\tag{9.107}
$$

Vegyük észre, hogy a (9.107) felület menti kovariáns deriváltak, hasonlóan a (9.101) felület menti kovariáns deriváltakhoz, két részből állnak. A jobboldalon álló első tag, azaz a felületi kovariáns derivált, a felület érintősíkjában fekvő tenzorkomponensek felület érintősíkjában végbemenő változását tükrözi. A jobboldalon álló második, az ún. járulékos rész, tekintettel a (9.101) képletekre az S felületre merőleges tenzorösszetevők felület menti változásának hatását fejezi ki.

A $t^{kl}(x^{\gamma}) = \bar{t}^{kl}(x^{\gamma},0)$, $t^{k}{}_{l}(x^{\gamma}) = \bar{t}^{k}{}_{l}(x^{\gamma},0)$, és $t_{kl}(x^{\gamma}) = \bar{t}_{kl}(x^{\gamma},0)$ másodrendű tenzorok felületi, és felület menti kovariáns deriváltjaival kapcsolatos összefüggések a

$(9.106)_5$, $(9.106)_3$ és $(9.106)_2$

továbbá a

$(9.107)_5$, $(9.107)_3$ és $(9.107)_2$

képletekből adódnak a

$$
\begin{aligned}
&d^{kl}{}_{3} \to t^{kl}\,, \qquad && d^{\kappa\lambda}{}_{\sigma} = 0\,,\\
&d^{k}{}_{3p} \to t^{k}{}_{p}\,, \qquad && d^{\kappa}{}_{\sigma\pi} = 0\,,\\
&d^{3}{}_{lp} \to t_{lp}\,, \qquad && d^{\kappa}{}_{\lambda\sigma} = 0
\end{aligned}
$$

cserékkel, illetve helyettesítésekkel.

A $t_{k}{}^{l}(x^{\gamma}) = \bar{t}_{k}{}^{l}(x^{\gamma},0)$ egyszer kovariáns, egyszer kontravariáns alakra vonatkozó képleteket minden magyarázat nélkül közöljük.

Felületi kovariáns derivált másodrendű tenzorra:

$$
\begin{aligned}
&t^{\kappa\lambda}{}_{\|\rho} = t^{\kappa\lambda}{}_{,\rho} + \Gamma^{\kappa}_{\rho\sigma} t^{\sigma\lambda} + \Gamma^{\lambda}_{\rho\sigma} t^{\kappa\sigma}\,,\\
&t^{\kappa}{}_{\lambda\|\rho} = t^{\kappa}{}_{\lambda,\rho} + \Gamma^{\kappa}_{\rho\sigma} t^{\sigma}{}_{\lambda} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda\rho} t^{\kappa}{}_{\sigma}\,,\\
&t_{\kappa}{}^{\lambda}{}_{\|\rho} = t_{\kappa}{}^{\lambda}{}_{,\rho} - \Gamma^{\sigma}_{\kappa\rho} t_{\sigma}{}^{\lambda} + \Gamma^{\lambda}_{\rho\sigma} t_{\kappa}{}^{\sigma}\,,\\
&t_{\kappa\lambda\|\rho} = t_{\kappa\lambda,\rho} + \Gamma^{\sigma}_{\kappa\rho} t_{\sigma\lambda} + \Gamma^{\sigma}_{\lambda\rho} t_{\kappa\sigma}\,.
\end{aligned}
\tag{9.108}
$$

Felület menti kovariáns derivált másodrendű tenzorra:

$$
\begin{aligned}
&t^{\kappa\lambda}{}_{|\rho} = t^{\kappa\lambda}{}_{;\rho} = t^{\kappa\lambda}{}_{\|\rho} - b_{\rho}{}^{\kappa} t^{3\lambda} - b_{\rho}{}^{\lambda} t^{\kappa 3}\,,\\
&t^{\kappa}{}_{\lambda|\rho} = t^{\kappa}{}_{\lambda;\rho} = t^{\kappa}{}_{\lambda\|\rho} - b_{\rho}{}^{\kappa} t^{3}{}_{\lambda} - b_{\lambda\rho} t^{\kappa}{}_{3}\,,\\
&t_{\kappa}{}^{\lambda}{}_{|\rho} = t_{\kappa}{}^{\lambda}{}_{;\rho} = t_{\kappa}{}^{\lambda}{}_{\|\rho} - b_{\kappa\rho} t^{\lambda}{}_{3} - b_{\rho\lambda} t_{\kappa}{}^{3}\,,\\
&t_{\kappa\lambda|\,\rho} = t_{\kappa\lambda,\rho} = t_{\kappa\lambda\|\rho} + b_{\kappa\rho} t_{\,3\lambda} - b_{\lambda\rho} t_{\,\kappa 3}\,.
\end{aligned}
\tag{9.109}
$$

Vegyük észre, hogy az S felület kétméretű terében érvényes $(9.108)_{1,\ldots,4}$ képletek rendre a háromdimenziós térben érvényes (8.33), $(8.34))_{1,\ldots,3}$ képletek analogonjai, hiszen a latin betűket görögre cserélve rendre megkaphatók a a (8.33), $(8.34))_{1,\ldots,3}$ képletekből.

Ami a (9.97), (9.98); a (9.106) és a (9.108) felületi kovariáns deriváltak felület menti kovariáns deriváltakkal való kapcsolatát megadó és a járulékos tagokat tartalmazó a (9.100);

a (9.107) és a (9.109) összefüggéseket illeti az alábbi szabályszerűség olvasható ki az utóbbi képletekből:

Ami a szóhasználatot illeti

- *eredeti tenzornak* nevezzük azt a felületi tenzort (ezalatt magán az S felületen értelmezett tenzort kell érteni) vagy azt az altenzort (az utóbbi a háromdimenziós térben értelmezett és az S felületre épített KR-ben értelmezett tenzor vagy ennek egy altenzora az S felületre lokalizálva) melyet deriválni akarunk,
- *deriválási indexnek* nevezzük azt a görög indexet, melyre vonatkozóan a kovariáns deriváltakat képezni karjuk,
- *tekintett indexnek* nevezzük az eredeti tenzor azon indexét, amely a járulékos tag forrását adó bázisvektort azonosítja.

A következő szabályszerűségek figyelhetők meg:

- a járulékos tag mindig az eredeti tenzor és a görbületi tenzor szorzata,
- a szorzat előjele {negatív} [pozitív], ha a tekintett index {görög index} [a hármas szám],
- a görbületi tenzor egyik indexe, ez mindig alsó index, a deriválási index,
- ha a tekintett index görög betű, akkor a görbületi tenzor másik indexe mindig a tekintett index, amely megtartja az eredeti indexpozíciót, azaz {felső} [alsó], ha a tekintett index is {felső} [alsó], a tekintett index helyére pedig a hármas szám kerül,
- ha a tekintett a hármas szám, akkor a görbületi tenzor másik indexe néma görög index, melynek pozíciója {felső} [alsó], ha a tekintett hármas index {alsó } [felső], míg párja a tekintett hármas index helyén jelenik meg,
- az eredeti tenzor többi indexe nem változik.

Kimutatható a metrikus tenzor, és az epszilon tenzor kovariáns deriváltjával kapcsolatos (8.38) és (8.40) képletek, valamint a (9.109), illetve a (9.107) összefüggések segítségével, kihasználva a metrikus és az epszilon tenzorok szerkezetét, hogy

$$g^{\kappa\lambda}{}_{|\rho} = g^{\kappa\lambda}{}_{\|\rho} = 0\,, \qquad g_{\kappa\lambda|\rho} = g_{\kappa\lambda\|\rho} = 0\,, \qquad \delta_\kappa{}^\lambda{}_{|\rho} = \delta_\kappa{}^\lambda{}_{\|\rho} = 0\,, \tag{9.110}$$

és, hogy

$$\varepsilon^{\kappa\lambda 3}{}_{|\rho} = \varepsilon^{\kappa\lambda 3}{}_{\|\rho} = 0\,, \qquad \varepsilon_{\kappa\lambda 3|\rho} = \varepsilon_{\kappa\lambda 3\|\rho} = 0\,. \tag{9.111}$$

A (9.110)-re fordítva mondjuk a figyelmet, a $(8.38)_1$, $(9.109)_1$, és (9.14) alapján a

$$0 = g^{\kappa\lambda}{}_{;\rho} = g^{\kappa\lambda}{}_{|\rho} = g^{\kappa\lambda}{}_{\|\rho} - b_\rho{}^\kappa g^{3\lambda} - b_\rho{}^\lambda g^{\kappa 3} = g^{\kappa\lambda}{}_{\|\rho}$$

eredmény, vagyis a bizonyítani kívánt állítás következik. A többi esetben a fentiekhez hasonlóan lehet eljárni.

9.3.2. Riemann-Christoffel görbületi tenzor az S felület kétméretű terében. A továbbiakban, kihasználva majd a 8.4.1. szakasz gondolatmenetét, arra a kérdésre keressük a választ, hogy mi a felületi kovariáns deriválások sorrendjének hatása. Legyen az u_μ legalább kétszer folytonosan deriválható felületi vektormező.

Eltűnik a

$$d_{\kappa\lambda\rho} = u_{\kappa\|\lambda\rho} - u_{\kappa\|\rho\lambda} \tag{9.112}$$

különbség, ha a deriválások sorrendje felcserélhető. A $(9.108)_4$ deriválási szabály felhasználásával, és a

$$t_{\kappa\lambda} \quad \to \quad u_{\kappa\|\lambda}$$

cserével

$$u_{\kappa\|\lambda\rho} = (u_{\kappa\|\lambda})_{,\,\rho} - \Gamma^\sigma_{\kappa\rho} u_{\sigma\|\lambda} - \Gamma^\sigma_{\lambda\rho} u_{\kappa\|\sigma}$$

a (9.112) jobboldalán álló első tag. Felcserélve a λ és ρ indexeket, majd a fenti képlet és az eredmény (9.112)-ba történő helyettesítése után

$$d_{\kappa\lambda\rho} = (u_{\kappa\|\lambda})_{,\rho} - (u_{\kappa\|\rho})_{,\lambda} - \Gamma^{\sigma}_{\kappa\rho} u_{\sigma\|\lambda} + \Gamma^{\sigma}_{\kappa\lambda} u_{\sigma\|\rho} \tag{9.113}$$

a különbség. A felületi kovariáns deriváltakkal kapcsolatos (9.98) képlet alkalmas indexcserékkel történő helyettesítésével, nem részletezve a nem túl bonyolult formális átalakításokat, innen az

$$\boxed{u_{\kappa\|\lambda\rho} - u_{\kappa\|\rho\lambda} = R^{\nu}{}_{\kappa\lambda\rho} u_{\nu}} \tag{9.114}$$

eredmény következik, ahol

$$\boxed{R^{\nu}{}_{\kappa\lambda\rho} = \partial_{\lambda}\Gamma^{\nu}_{\rho\kappa} - \partial_{\rho}\Gamma^{\nu}_{\lambda\kappa} + \Gamma^{\nu}_{\lambda\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\rho\kappa} - \Gamma^{\nu}_{\rho\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\kappa}} \tag{9.115}$$

a felületi Riemann-Christoffel féle görbületi tenzor.

Tekintsük a $t^{\kappa}{}_{\lambda}$ felületi másodrendű tenzort. A fentiekhez hasonló módon mutatható ki a $(9.106)_1$ majd a $(9.108)_2$ felhasználásával, első lépésben a

$$d^{\kappa}{}_{\lambda\pi\|\rho} \to t^{\kappa}{}_{\lambda\|\chi\pi} \qquad \text{és} \qquad d^{\kappa}{}_{\lambda\pi\|\rho} \to t^{\kappa}{}_{\lambda\|\chi\pi}$$

helyettesítésekkel, hogy

$$\boxed{t^{\kappa}{}_{\lambda\|\pi\chi} - t^{\kappa}{}_{\lambda\|\chi\pi} = t^{\kappa}{}_{\mu} R^{\mu}{}_{\lambda\chi\pi} - t^{\mu}{}_{\lambda} R^{\kappa}{}_{\mu\chi\pi}} \tag{9.116}$$

a kétszeres felületi kovariáns deriváltak különbsége.

Mivel a (9.115) a felületi Christoffel szimbólumokat és azok deriváltjait tartalmazza a felületi Riemann-Christoffel tenzor független az u_{μ} vektormezőtől.

Az

$$l \to \nu\,, \quad m \to \kappa\,, \quad q \to \lambda\,, \quad p \to \rho$$

betűcserékkel a háromdimenziós esetre érvényes

$$R^{l}{}_{mqp} = 0$$

egyenletből – v.ö.: (8.51) képlet - az S felületre történő lokalizálással, továbbá a (8.49) , (9.115) és a görbületi tenzort értelmező $(9.45)_{1,2}$ képletek felhasználásával a

$$0 = \partial_{\lambda}\Gamma^{\nu}_{\rho\kappa} - \partial_{\rho}\Gamma^{\nu}_{\lambda\kappa} + \Gamma^{\nu}_{\lambda\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\rho\kappa} - \Gamma^{\nu}_{\rho\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\kappa} + \Gamma^{\nu}_{\lambda 3}\Gamma^{3}_{\rho\kappa} - \Gamma^{\nu}_{\rho 3}\Gamma^{3}_{\lambda\kappa}\,,$$

vagy ami ugyanaz a

$$\boxed{R^{\nu}{}_{\kappa\lambda\rho} = b_{\lambda}{}^{\nu} b_{\rho\kappa} - b_{\rho}{}^{\nu} b_{\lambda\kappa}} \tag{9.117}$$

összefüggés adódik. Hasonló módon a

$$l \to 3\,, \quad m \to \kappa\,, \quad q \to \lambda\,, \quad p \to \rho$$

betűcserékkel kapjuk, ismét kihasználva a $(9.45)_{1,2}$, valamint a (9.44) összefüggéseket, figyelembe véve továbbá a görbületi tenzor és a Christoffel szimbólumok szimmetriáját, hogy

$$\begin{aligned} R^{3}{}_{\kappa\lambda\rho} &= \partial_{\lambda}\Gamma^{3}_{\rho\kappa} - \partial_{\rho}\Gamma^{3}_{\lambda\kappa} + \Gamma^{3}_{\lambda\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\rho\kappa} - \Gamma^{3}_{\rho\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\kappa} \\ &= b_{\kappa\rho\,,\lambda} - b_{\kappa\lambda\,,\rho} + b_{\sigma\lambda}\Gamma^{\sigma}_{\rho\kappa} - b_{\sigma\rho}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\kappa} = 0\,. \end{aligned} \tag{9.118}$$

A ν index lesüllyesztésével majd a Kronecker szimbólum és a $(9.29)_1$ képlet felhasználásával a (9.117) alatti kifejezés átalakítható:

$$\begin{aligned} R_{\nu\kappa\lambda\rho} &= b_{\nu\lambda} b_{\rho\kappa} - b_{\nu\rho} b_{\lambda\kappa} = \delta_{\nu}{}^{\vartheta}\delta_{\kappa}{}^{\varphi} b_{\vartheta\lambda} b_{\rho\varphi} - \delta_{\nu}{}^{\varphi}\delta_{\kappa}{}^{\vartheta} b_{\rho\varphi} b_{\vartheta\lambda} = (\delta_{\nu}{}^{\vartheta}\delta_{\kappa}{}^{\varphi} - \delta_{\nu}{}^{\varphi}\delta_{\kappa}{}^{\vartheta}) b_{\vartheta\lambda} b_{\rho\varphi} \\ &= \varepsilon_{\nu\kappa 3}\varepsilon^{\vartheta\varphi 3} b_{\vartheta\lambda} b_{\varphi\rho} = \varepsilon_{\nu\kappa}\varepsilon^{\vartheta\varphi} b_{\vartheta\lambda} b_{\varphi\rho} = e_{\nu\kappa 3}\, e^{\vartheta\varphi 3}\, b_{\vartheta\lambda} b_{\varphi\rho} \end{aligned} \tag{9.119}$$

Az utóbbi képletben, amint az $e_{\nu\kappa 3}$ és $e^{\vartheta\varphi 3}$ tulajdonságait kihasználva – v.ö.: a permutációs szimbólum 1.2.3. szakaszban adott értelmezését az – könnyen ellenőrizhető

$$e^{\vartheta\varphi 3}\, b_{\vartheta\lambda} b_{\varphi\rho} = e_{\lambda\rho 3}\, |b_{\pi\psi}| \,. \tag{9.120}$$

A $(9.120)_1$ képlet helyettesítése után (9.119)-ból, felhasználva a determinánsok szorzástételét, a Gauss görbülettel kapcsolatos $(9.71)_{2,3}$ képleteket, valamint a (9.22)-t, az

$$R_{\nu\kappa\lambda\rho} = e_{\nu\kappa 3} e_{\lambda\rho 3} |b_{\psi\pi}| = e_{\nu\kappa 3} e_{\lambda\rho 3} |b_{\psi}{}^{\varphi} a_{\varphi\pi}| = e_{\nu\kappa 3} e_{\lambda\rho 3} K a_o \tag{9.121}$$

eredmény adódik, ahol mind K, mind pedig a_o különbözik zérustól. Ez egyben azt is jelenti, figyelembevéve a (9.28)-at, hogy

$$R_{\Sigma\Sigma\lambda\rho} = R_{\nu\kappa\Sigma\Sigma} = 0 \tag{9.122}$$

(A nagy görög index nem összegező, hanem rögzített index, amelynek értéke vagy egy, vagypedig kettő lehet.) és, hogy

$$R_{1212} = R_{2121} = -R_{2112} = -R_{1221} \neq 0 \,. \tag{9.123}$$

Utóbbi egyenlet következménye, hogy a felületi kovariáns deriválások sorrendje, ellentétben a térbeli esettel, általában nem cserélhető fel.

A (9.121)-ből, kifejtve a $|b_{\pi\psi}|$ determinánst az

$$R_{1212} = b_{11} b_{22} - b_{12} b_{12} \tag{9.124}$$

és a

$$\boxed{K = \frac{R_{1212}}{a_o}} \tag{9.125}$$

képletek következnek.

A $(9.43)_3$ és a (9.115) képletek szerint R_{1212} megadható a $g_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}$ metrikus tenzor és deriváltjai segítségével. Ennek a körülménynek alapján a (9.125) egyenlet geometriai jelentése a következőképpen fogalmazható meg:

A K Gauss-féle görbület, ami az S felület háromméretű térben való viselkedésének egy mérőszáma, meghatározható a felületen végzett hosszmérések segítségével. Visszaidézve a (9.86) képletet, és pontosítva az előző mondatot azt mondhatjuk, hogy a két görbületi sugár szorzata mindig meghatározható az S felület kétdimenziós terében végzett mérésekkel, annak ellenére, hogy a főgörbületi sugarak a felület mint háromdimenziós alakzat jellemzői.

A (9.118) képlet kibővítésével és a felületi kovariáns deriváltakkal kapcsolatos $(9.108)_4$ egyenlet felhasználásával, pontosabban a

$$t_{\kappa\lambda\|\rho} \;\to\; b_{\kappa\rho\|\lambda} \,, \qquad \text{és} \qquad t_{\kappa\lambda\|\rho} \;\to\; b_{\rho\kappa\|\lambda}$$

cserékkel, a kibővített egyenletből a

$$0 = b_{\kappa\rho\,,\,\lambda} - \Gamma^{\sigma}_{\rho\lambda} b_{\sigma\kappa} - \Gamma^{\sigma}_{\kappa\lambda} b_{\sigma\rho} - \left[b_{\kappa\lambda\,,\,\rho} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda\rho} b_{\sigma\kappa} - \Gamma^{\sigma}_{\kappa\rho} b_{\sigma\lambda} \right]$$

vagy ami ugyanaz a

$$b_{\kappa\rho\|\lambda} = b_{\kappa\lambda\|\rho} \tag{9.126}$$

eredmény következik. Utóbbi egyenlet szerint a λ és ρ indexek tekintetében szimmetria áll fenn. Következésképp

$$\boxed{\varepsilon^{3\lambda\rho} b_{\kappa\lambda\|\rho} = 0 \,.} \tag{9.127}$$

Ez az összefüggés a differenciálgeometria Gauss-Codazzi-féle egyenletének tenzoriális alakja.

Az S felületen tekintve a (8.4) és (8.9) összefüggéseket, kihasználva továbbá a görbületi tenzorral kapcsolatos $(9.45)_{1,2}$ képleteket, a

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_{\alpha\,,\,\beta} &= \mathbf{a}_{\alpha\,,\,\beta} = \Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}\mathbf{a}_{\sigma} + b_{\alpha\beta}\mathbf{a}_3\\ \mathbf{g}^{\alpha}{}_{,\,\beta} &= \mathbf{a}^{\alpha}{}_{,\,\beta} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\sigma}\mathbf{a}^{\sigma} + b_{\beta}{}^{\alpha}\mathbf{a}^3\end{aligned} \tag{9.128}$$

és

$$\mathbf{g}_{3\,,\,\beta} = \mathbf{a}_{3\,,\,\beta} = -b_{\beta}{}^{\sigma}\mathbf{a}_{\sigma} \tag{9.129}$$

eredmény adódik a bázisvektorok deriváltjainak számítására. A $(9.128)_{1,2}$ egyenletek Gauss formulái. A (9.129) egyenlet pedig Weingarten képlete. A (9.129) egyenletet skalárisan szorozva önmagával a

$$\mathbf{a}_{3\,,\,\alpha}\cdot\mathbf{a}_{3\,,\,\beta} = b_{\alpha}{}^{\sigma}a_{\sigma\varphi}b_{\beta}{}^{\varphi} = b_{\alpha}{}^{\sigma}b_{\sigma\beta} \tag{9.130}$$

összefüggés következik, ahonnan a $\mathrm{d}x^{\alpha}\mathrm{d}x^{\beta}$-val történő átszorzással megkapjuk az S felület *harmadik alapformáját*:

$$\mathrm{d}\mathbf{a}_3\cdot\mathrm{d}\mathbf{a}_3 = b_{\alpha}{}^{\sigma}b_{\sigma\beta}\,\mathrm{d}x^{\alpha}\mathrm{d}x^{\beta} \tag{9.131}$$

Legyen

$$c_{\alpha\beta} = b_{\alpha}{}^{\sigma}b_{\sigma\beta} = b_{\alpha\sigma}a^{\sigma\psi}b_{\psi\beta}\,. \tag{9.132}$$

Vegyük észre, hogy $c_{\alpha\beta}$ szimmetrikus tenzor. A bevezetett jelöléssel

$$\boxed{\mathrm{d}\mathbf{a}_3\cdot\mathrm{d}\mathbf{a}_3 = c_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^{\alpha}\mathrm{d}x^{\beta} = c_{11}\,\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^1 + 2c_{12}\,\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2 + c_{22}\,\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^2} \tag{9.133}$$

a *harmadik alapforma alakja.*

A (9.119), (9.121) és $(9.25)_1$ egybevetése alapján írható

$$b_{\nu\lambda}b_{\rho\kappa} - b_{\nu\rho}b_{\lambda\kappa} = \sqrt{a_o}\mathfrak{e}_{\nu\kappa}\sqrt{a_o}\mathfrak{e}_{\lambda\rho}K = \varepsilon_{\nu\kappa3}\varepsilon_{\lambda\rho3}K$$

egyenlet $a^{\nu\rho}$-val történő végigszorzásával a

$$b_{\nu\lambda}b_{\kappa\rho}a^{\nu\rho} - b_{\nu}{}^{\nu}b_{\lambda\kappa} - \varepsilon_{\nu\kappa3}\varepsilon_{\lambda\rho3}a^{\nu\rho}K = 0 \tag{9.134}$$

eredmény következik. Az

$$\varepsilon_{\nu\kappa3}\varepsilon_{\lambda\rho3}a^{\nu\rho} = -a^{\kappa\lambda} \tag{9.135}$$

összefüggés – ennek igazolását gyakorlatra hagyjuk – , valamint a $(9.71)_1$, illetve a $(9.72)_2$ felhasználásával (9.134) a

$$b_{\kappa}{}^{\nu}b_{\nu\lambda} - 2Hb_{\kappa\lambda} + a_{\kappa\lambda}K = 0 \tag{9.136}$$

alakban írható fel. Felemelve a λ indexet a (9.136)-ból a görbületi tenzorra vonatkozó Cayley-Hamilton tételt kapjuk:

$$b_{\kappa}{}^{\nu}b_{\nu}{}^{\lambda} - 2Hb_{\kappa}{}^{\lambda} + \delta_{\kappa}{}^{\lambda}K = 0\,. \tag{9.137}$$

A (9.132), illetve (9.136)-ba történő helyettesítésével kapott

$$\boxed{b_{\kappa\lambda} - 2Hb_{\kappa\lambda} + Ka_{\kappa\lambda} = 0} \tag{9.138}$$

egyenlet a három alapformában álló $g_{\kappa\lambda} = a_{\kappa\lambda}$, $b_{\kappa\lambda}$ és $c_{\kappa\lambda}$ tenzorokat, vagy a $\mathrm{d}x^{\kappa}\mathrm{d}x^{\lambda}$-val történő átszorzás után magát a három alapformát kapcsolja össze.

10. FEJEZET

Integrálátalakítási tételek és parciális integrálás

10.1. Integrálátalakítási tételek

10.1.1. Bevezető megjegyzések. A leggyakrabban előforduló integrálátalakítási tételek tárgyalása során a tételek

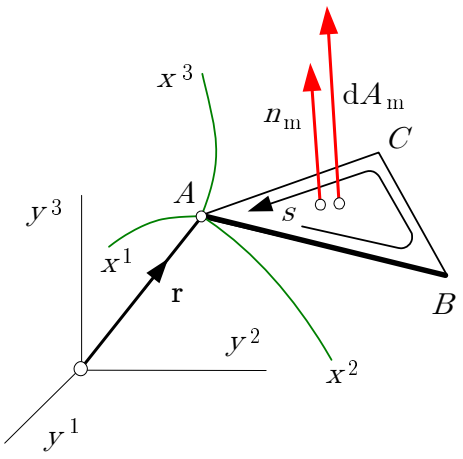
- szimbolikus alakban,
- az (x) görbevonalú KR-ben,

illetve ha az alkalmazások szempontjából szükségesnek látszik, akkor

- az (ξ) felületi görbevonalú KR-ben is

bemutatásra kerülnek.

A tételek szigorú igazolására terjedelmi okokból nem kerül sor. Vázlatos bizonyítást csak a Stokes tétel esetén adunk.



10.1. ábra. Az infinitezimális ABC háromszög

10.1.2. Stokes tétele. Tekintsük az infinitezimális ABC háromszöget és vezessük be az

$$\mathbf{r}_{AB} = d\mathbf{r}_I \qquad\qquad \mathbf{r}_{AC} = d\mathbf{r}_{II} \tag{10.1}$$

jelöléseket. A kovariáns bázisvektorok számításával kapcsolatos kapcsolatos (1.40) képlet továbbá a

$$dx^k_I = x^k\big|_B - x^k\big|_A \ , \qquad\qquad dx^k_{II} = x^k\big|_C - x^k\big|_A \tag{10.2a}$$

és

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^k}\,\mathrm{d}x^k = \mathbf{g}_k\,\mathrm{d}x^k \tag{10.2b}$$

összefüggések felhasználásával írható, hogy

$$\mathrm{d}\mathbf{r}_I = \mathbf{g}_k\,\mathrm{d}x^k_I\big|_A \ , \qquad\qquad \mathrm{d}\mathbf{r}_{II} = \mathbf{g}_k\,\mathrm{d}x^k_{II}\big|_A \ , \tag{10.3}$$

ahol a görbevonalú x^k koordináták mellett jobbra lenn álló római számok nem a szokott értelemben vett indexként szerepelnek. Ez a jelölésbeli megállapodás nem okoz félreértést, mert a kontravariáns koordinátáknak nincs alsó indexük.

Az ABC háromszöghöz tartozó $\mathrm{d}\mathbf{A}$ területvektort a

$$\mathrm{d}\mathbf{A} = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}\mathbf{r}_I \times \mathrm{d}\mathbf{r}_{II} \tag{10.4}$$

vektorszorzat értelmezi. A (10.3) képletek helyettesítésével és a kovariáns bázisvektorok vektoriális szorzatát adó (1.27) egyenlet felhasználásával innen a

$$\mathrm{d}\mathbf{A} = \frac{1}{2}\,\mathbf{g}_k \times \mathbf{g}_l \Big|_A \mathrm{d}x^k_I\,\mathrm{d}x^l_{II} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{klm}\,\mathrm{d}x^k_I\,\mathrm{d}x^l_{II}\,\mathbf{g}^m \Big|_A$$

vagy ami ugyanaz a

$$\mathrm{d}A_m = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{klm}\,\mathrm{d}x^k_I\,\mathrm{d}x^l_{II}\,\Big|_A \tag{10.5}$$

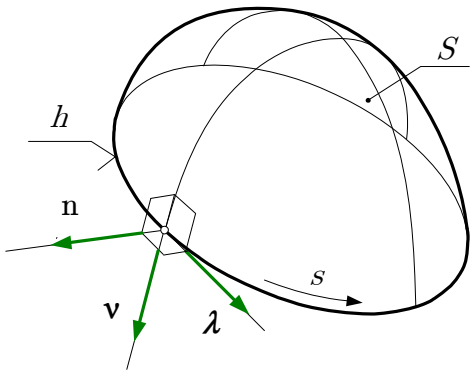
eredmény következik.

Az ABC háromszög által kifeszített sík n_m normális egységvektorát akkor tekintjük pozitívnak, ha a normális egységvektor felöl nézve – v.ö. 10.1. ábra – az ABC körüljárási sorrend az óramutató járásával ellentétes. Ez a körüljárási értelem a pozitív körüljárási irány.

Nyilvánvaló, hogy

$$\mathrm{d}A_m = n_m\,\mathrm{d}A \tag{10.6}$$

ahol $\mathrm{d}A$ az ABC háromszög területe (a skaláris felületelem).



10.2. ábra. A h görbével határolt nyitott S felület

Legyen az S egyszeresen összefüggő, szakaszonként sima nyitott felület. Legyen továbbá h az S felület szakaszonként sima peremgörbéje. Az S felület normális egységvektorát $\mathbf{n}$, a h peremgörbe érintő egységvektorát pedig $\boldsymbol{\lambda}$ jelöli. A $\boldsymbol{\nu}$ vektor a felület érintősíkjában fekszik és merőleges a $\mathbf{n}$ és $\boldsymbol{\lambda}$ vektorokra. Feltételezzük, hogy $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{n}$. Következőleg $|\boldsymbol{\nu}| = 1$ (a $\boldsymbol{\nu}$ is egységvektor). A $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\lambda}$, $\mathbf{n}$ hármas jobbsodratú egyenesvonalú ortogonális KR-t feszít ki (jobbsodratú vektorhármas). A h peremgörbe mentén mért s ívkoordináta akkor pozitív, ha a pozitív s irányba haladva a h görbe mentén a felület - feltéve, hogy a pozitív normális felől tekintjük - a bal oldalon fekszik.

A Stokes tétel előkészítése érdekében először az infinitezimális ABC háromszögön tekintünk egy részproblémát. Ezt követően az S felület esetén alkalmazzuk a kapott eredményt.

Legyen $\mathbf{u} = u_k\,\mathbf{g}^k$ az infinitezimális ABC háromszögön és annak környezetében értelmezett, folyamatosan differenciálható vektormező. Határozzuk meg a

$$\oint_{ABCA} \mathbf{u}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} \tag{10.7}$$

vonalintegrál értékét.

A háromszög egyes oldalélein vett integrálokat az $\mathbf{u}$ vektormező oldalfelező pontokban vett értékei és a vonatkozó $\mathbf{r}_{AB}$, $\mathbf{r}_{BC}$, illetve $\mathbf{r}_{CA}$ vektorok szorzataiként számítjuk. Az oldalfelező pontokhoz tartozó $\mathbf{u}$ értékeket pedig az A pontra támaszkodó lineáris approximáció adja.

Ezek a közelítések az ABC háromszög infinitezimális volta miatt engedhetők meg.

Fentiek alapján

$$\begin{aligned}\oint_{ABCA} \mathbf{u}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathrm{d}\mathbf{r}_I\cdot\left(\mathbf{u}(A)+\mathbf{u}\otimes\nabla|_A\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_I}{2}\right)+\\ +(\mathrm{d}\mathbf{r}_{II}-\mathrm{d}\mathbf{r}_I)\cdot\left[\mathbf{u}(A)+\mathbf{u}\otimes\nabla|_A\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_I+\mathrm{d}\mathbf{r}_{II}}{2}\right)\right]+\\ +(-\mathrm{d}\mathbf{r}_{II})\cdot\left(\mathbf{u}(A)+\mathbf{u}\otimes\nabla|_A\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_{II}}{2}\right)\,.\end{aligned}$$

Az utóbbi képletből indexes jelölésre térve át és helyettesítve a (10.2b), (10.3) és (8.29) összefüggéseket a

$$\begin{aligned}\oint_{ABCA} u_k\,\mathrm{d}x^k = \left(u_k(A)+\frac{1}{2}\,u_{k\,;\,l}\Big|_A\,\mathrm{d}x^l_I\right)\mathrm{d}x^k_I+\\ +\left[u_k(A)+\frac{1}{2}\,u_{k\,;\,l}\Big|_A\left(\mathrm{d}x^l_I+\mathrm{dx}^l_{II}\right)\right]\left(\mathrm{d}x^k_I-\mathrm{dx}^k_{II}\right)+\\ +\left(u_k(A)+\frac{1}{2}\,u_{k\,;\,l}\Big|_A\,\mathrm{d}x^l_{II}\right)\mathrm{d}x^k_{II}=\frac{1}{2}u_{k\,;\,l}\Big|_A\left(\mathrm{d}x^k_{II}\,\mathrm{d}x^l_I-\mathrm{d}x^l_{II}\,\mathrm{d}x^k_I\right)\end{aligned}$$

eredmény következik. Az egyenlet jobb oldala a Kronecker szimbólummal kapcsolatos (1.20) képlet, továbbá az (1.29) összefüggés értelemszerű alkalmazásával, illetve a (10.5) egyenlet felhasználásával tovább alakítható:

$$\begin{aligned}\oint_{ABCA} u_k\,\mathrm{d}x^k = \frac{1}{2}\,u_{k\,;\,l}\Big|_A\left(\delta^l{}_m\delta^k{}_n-\delta^k{}_m\delta^l{}_n\right)\,\mathrm{d}x^m_I\,\mathrm{d}x^n_{II}=\\ =\frac{1}{2}\,u_{k\,;\,l}\Big|_A\,e^{lks}\,e_{mns}\,\mathrm{d}x^m_I\,\mathrm{d}x^n_{II}=\frac{1}{2}\,u_{k\,;\,l}\,\varepsilon^{lks}\varepsilon_{mns}\Big|_A\,\mathrm{d}x^m_I\,\mathrm{d}x^n_{II}=\left(\varepsilon^{slk}\,u_{k\,;\,l}\right)\big|_A\,\mathrm{d}A_s\end{aligned}$$

Ha még a (10.6), illetve a (8.72) alapján írható

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \boldsymbol{\lambda}\,\mathrm{d}s = \mathrm{d}x^k\mathbf{g}_k \tag{10.8}$$

összefüggést is kihasználjuk, akkor a

$$\oint_{ABCA} u_k\lambda^k\,\mathrm{d}s = \left(n_s\,\varepsilon^{slk}\,u_{k\,;\,l}\right)\big|_A\,\mathrm{d}A \tag{10.9a}$$

illetve szimbolikus alakban írva, a

$$\oint_{ABCA} \mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\lambda}\,\mathrm{d}s = (\mathbf{n}\times\nabla)\cdot\overset{\downarrow}{\mathbf{u}}\Big|_A\,\mathrm{d}A \tag{10.9b}$$

eredményre jutunk, ahol az $\mathbf{u}$ felett álló és lefelé mutató nyíl azt jelzi, hogy a ∇ operátor az $\mathbf{u}$-ra hat. Ezt a jelölésbeli konvenciót, ha szükséges, a továbbiakban is alkalmazzuk.

Visszatérve az S felülethez tegyük fel, hogy az S felületen és az S felület környezetében értelmezett $\mathbf{u}$ vektormező folytonosan differenciálható. Célunk a (10.7) vonalintegrál számítása ezúttal a h zárt peremgörbe mentén a (10.9a) összefüggés kihasználásával.

Elemi (infinitezimális) háromszögekre osztva fel az S felület majd összeadva az elemi háromszögeken tekintett (10.9a) típusú integrálokat megfigyelhető, hogy azokon az oldaléleken melyek két szomszédos elemi háromszöghöz tartoznak a körüljárási értelem különbözősége miatt a vonatkozó vonalintegrálok törlik egymást. Alkalmas határátmenet után (azaz a háromszögek számát a végtelenhez, maximális méretüket pedig zérushoz közelítve) bal oldali összeg határértéke h-n vett vonalintegrál, a jobboldali összeg pedig az S-n vett felületi integrál:

$$\boxed{\oint_h \mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\lambda}\,\mathrm{d}s = \int_S (\mathbf{n}\times\nabla)\cdot\overset{\downarrow}{\mathbf{u}}\,\mathrm{d}A = \int_S \overset{\downarrow}{\mathbf{u}}\cdot(\mathbf{n}\times\nabla)\,\mathrm{d}A\,,} \tag{10.10a}$$

vagy

$$\boxed{\oint_h u_k\,\lambda^k\,\mathrm{d}s = \int_S n_s\varepsilon^{slk}\,u_{k\,;l}\,\mathrm{d}A = \int_S u_{k\,;l}\,n_s\varepsilon^{slk}\,\mathrm{d}A\,.} \tag{10.10b}$$

A (10.10a,b) egyenletek Stokes tételének szimbolikus, illetve indexes jelölésmódban szedett alakjai.

Ha felületi KR-ben vagyunk, akkor a 9.1.1. alszakasz negyedik bekezdése és a (9.10) összefüggés alapján

$$\mathbf{n}_3 = \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}^3\,. \tag{10.11}$$

Következőleg ha a felületen vagyunk, akkor fennállnak a

$$\mathbf{n}\times\nabla = a^3\times\underbrace{\mathbf{a}^s\partial_s}_{\nabla} = \varepsilon^{3\sigma\rho}\,\mathbf{a}_\rho\partial_\sigma \tag{10.12}$$

és

$$\partial_\sigma\mathbf{u} = u_{k\,;\sigma}\mathbf{a}^k \tag{10.13}$$

egyenletek. A (10.11), (10.12), valamint (10.13) képletek felhasználásával kapjuk a Stokes tétel (10.10a) alatti alakjából a Stokes tétel felületi KR-ben használatos alakját:

$$\boxed{\oint_h u_\rho\,\lambda^\rho\,\mathrm{d}s = \int_S \varepsilon^{3\sigma\rho}\,u_{\rho|\sigma}\,\mathrm{d}A\,.} \tag{10.14}$$

A képletben $u_{\rho|\sigma}$ az u_ρ vektormező felületen vett kovariáns deriváltja. Ennek képzéséhez elegendő az u_r vektormezőt magán az S felületen ismerni.

Megjegyezzük, hogy a fenti eredmény közvetlenül is megkapható a Stokes tétel indexes jelölésmóddal írt (10.10b) alakjából, ha figyelembe vesszük, hogy felületi KR-ben (a) $\lambda^3 = 0$ (a k helyére ρ írható a baloldalon), (b) $n_\kappa = 0$, $n_3 = 1$ (a jobboldalon elhagyható az n_s, az l és k indexek helyére pedig σ és ρ írható).

10.1.3. Green tétele. A tételt felületi KR-ben vezetjük le Stokes tételéből indulva ki. Legyen $\mathbf{w}$ az S felületen értelmezett folytonosan differenciálható vektormező. Legyen továbbá

$$\mathbf{u} = \mathbf{a}_3\times\mathbf{w}\,. \tag{10.15}$$

A (10.15) képlet Stokes tételbe, pontosabban a (10.10a) baloldalába történő helyettesítésével – tekintettel a 10.2. ábrával kapcsolatosan már szereplő

$$\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\lambda}\times\mathbf{n} = \boldsymbol{\lambda}\times\mathbf{a}_3 \tag{10.16}$$

összefüggésre - kapjuk, hogy

$$\oint_h \mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\lambda}\,\mathrm{d}s = \oint_h \boldsymbol{\lambda}\cdot(\mathbf{a}_3\times\mathbf{w})\;\mathrm{d}s = \oint_h \boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{w}\mathrm{d}s = \oint_h \nu^\alpha\, w_\alpha \mathrm{d}s \tag{10.17}$$

hiszen a $\boldsymbol{\nu}$ vektor az S felület érintősíkjában fekszik. A (10.10a) jobboldala a (10.15) képlet helyettesítésével és a (10.12) összefüggés felhasználásával alakítható át. Az átalakítások során kihasználjuk a a $(9.45)_2$ és a (9.100) képletek alapján írható

$$\partial_\sigma \mathbf{a}^3 = \partial_\sigma \mathbf{a}_3 = \mathbf{g}_{3,\sigma} = \Gamma^{\pi}_{3\sigma}\mathbf{a}_\pi = -b_\sigma{}^\pi \mathbf{a}_\pi\ , \tag{10.18a}$$

$$w^\pi{}_{;\,\rho} = w^\pi{}_{|\,\rho} = w^\pi{}_{||\,\rho} - b_\rho{}^\pi \bar{w}^3 \tag{10.18b}$$

továbbá a

$$\partial_\sigma \mathbf{w} = w^t{}_{;\,\sigma}\mathbf{a}_t \tag{10.18c}$$

illetve a (9.25) és (9.29) egybevetéséből adódó

$$\varepsilon^{3\sigma\rho}\varepsilon_{3\pi\rho} = \delta^\sigma{}_\pi \tag{10.18d}$$

egyenleteket és értelemszerűen alkalmazzuk a $(9.32)_1$ képletet. A főbb lépéseket az alábbiak részletezik:

$$\begin{aligned}\int_S (\mathbf{n}\times\nabla)\cdot\mathbf{u}\,\mathrm{d}A &= \int_S \varepsilon^{3\sigma\rho}\,\mathbf{a}_\rho\cdot(\partial_\sigma\mathbf{a}_3\times\mathbf{w})\;\mathrm{d}A = \\ &= \int_S \varepsilon^{3\sigma\rho}\,\mathbf{a}_\rho\cdot\left[\Gamma^{\pi}_{3\sigma}\,\varepsilon_{\pi kt}\,w^k\mathbf{a}^t + \mathbf{a}_3\times\left(w^k{}_{;\,\sigma}\,\mathbf{a}_k\right)\right]\mathrm{d}A = \\ &= \int_S \underbrace{\varepsilon^{3\sigma\rho}\varepsilon_{3\pi\rho}}_{\delta^\sigma{}_\pi}\left(\Gamma^{\pi}_{3\sigma}w^3 + w^\pi_{;\,\sigma}\right)\mathrm{d}A = \\ &= \int_S \left(w^\pi{}_{;\,\pi} + b_\pi{}^\pi\, w^3\right)\mathrm{d}A = \int_A w^\pi{}_{||\,\pi}\mathrm{d}A\end{aligned} \tag{10.19}$$

A (10.17) és (10.19), (10.10a)-val történő egybevetésével, u^π-t gondolva w^π helyére, adódik Green tétele:

$$\boxed{\oint_h u^\pi\,\nu_\pi \mathrm{d}s = \int_S u^\pi{}_{\|\,\pi}\mathrm{d}A\,.} \tag{10.20}$$

Figyeljük meg, hogy a fenti egyenletben nem jelenik meg az u^3 vektorkoordináta.

10.1.4. A Green és Stokes tételek általánosításai. Legyen $\mathfrak{D}$ az S felületen – lásd 10.2. ábra – és az S felület környezetében értelmezett tetszőleges tenzormező. Legyen továbbá a $*$ két tenzor között értelmezhető bármilyen szorzás műveleti jele. A szimbolikus írásmódban írt és így koordináta-rendszertől független alakú

$$\boxed{\oint_h \mathfrak{D} * \boldsymbol{\lambda}\,\mathrm{d}s = \int_S \overset{\downarrow}{\mathfrak{D}} * (\mathbf{n}\times\nabla)\;\mathrm{d}A} \tag{10.21a}$$

és

$$\boxed{\oint_h \boldsymbol{\lambda} * \mathfrak{D}\,\mathrm{d}s = \int_S (\mathbf{n}\times\nabla) * \overset{\downarrow}{\mathfrak{D}}\,\mathrm{d}A} \tag{10.21b}$$

egyenletek a (10.10a) Stokes tétel általánosításai. Valóban, ha a $*$ műveleti jelet a skaláris szorzás $\cdot$ műveleti jelére cseréljük és az $\mathbf{u}$ vektormezőt gondoljuk a $\mathfrak{D}$ tenzor helyére, akkor a (10.21b) egyenletből azonnal megkapjuk a Stokes tétel (10.10a) alatti alakját.

A továbbiakban a felületi KR nyújtotta előnyök is kihasználásra kerülnek. Ha a (10.21a) egyenletben

– a $*$ helyére a vektoriális szorzás $\times$ műveleti jelét, majd
- a $\mathfrak{D}$ tenzor helyére $\mathfrak{D} * \mathbf{a}_3$-t teszünk,

akkor a Green tétel egy általánosítását kapjuk.

A baloldal átalakítása során az említett cserék végrehajtása után a (10.16) képlet helyettesítése szükséges.

A jobboldal átalakítása ismét az említett cserék után, a (10.12), (10.18a,...,d) és $(9.32)_1$ képletek alkalmazása, illetve helyettesítése kívánatos. Ezt az átalakítást az alábbiak részletezik:

$$\begin{aligned}\overbrace{(\mathfrak{D} * \mathbf{a}_3)}^{\downarrow} \times (\mathbf{n} \times \nabla) &= \overbrace{(\mathfrak{D} * \mathbf{a}_3)}^{\downarrow} \times \left(\partial_\rho \, \varepsilon^{3\rho\pi} \mathbf{a}_\pi\right) = \\ &= \varepsilon^{3\rho\pi} \left[- (\mathfrak{D}\partial_\rho) * \varepsilon_{3\sigma\pi} \, \mathbf{a}^\sigma + \mathfrak{D} * \Gamma^\sigma_{3\rho} \, \mathbf{a}_\sigma \times \mathbf{a}_\pi \right] = \\ &= -\varepsilon^{3\rho\pi} \, \varepsilon_{3\sigma\pi} \left[(\mathfrak{D}\partial_\rho) * \mathbf{a}^\sigma + \mathfrak{D} * b_\rho{}^\sigma \mathbf{a}^3 \right] = \\ &= - \left[(\mathfrak{D}\partial_\rho) * \mathbf{a}^\rho + \mathfrak{D} * b_\rho{}^\rho \mathbf{a}^3 \right]\end{aligned}$$

Fentiek alapján a (10.21a) egyenletből a

$$\boxed{\oint_h \mathfrak{D} * \boldsymbol{\nu} \, \mathrm{d}s = \int_S \left[(\mathfrak{D}\partial_\rho) * \mathbf{a}^\rho + \mathfrak{D} * b_\rho{}^\rho \mathbf{a}^3 \right] \, \mathrm{d}A} \tag{10.22}$$

eredmény következik. Ez az összefüggés a Green tétel általánosítása. Valóban, ha a $*$ helyére a skaláris szorzás $\cdot$ műveleti jelét és a $\mathfrak{D}$ helyére az $\mathbf{u}$ vektormezőt gondoljuk és tekintettel vagyunk a (10.18c), illetve a (10.18b) képletekre, akkor a (10.22) összefüggésből megkapjuk a Green tétel (10.20) alatti alakját.

Ha a $\mathfrak{D}$ másodrendű tenzor – legyen ez mondjuk az N^{kl}-el jelölt tenzor –, a $*$-al jelölt szorzás a skaláris szorzás és $N^{k3} = 0$ akkor a (10.22) összefüggésből, szem előtt tartva, hogy felületi KR-ben vagyunk, a

$$\oint_h \mathbf{a}_k \, N^{k\lambda} \nu_\lambda \, \mathrm{d}s = \int_S \mathbf{a}_k \, N^{k\lambda}{}_{|\,\lambda} \, \mathrm{d}A \tag{10.23}$$

eredmény következik.

10.1.5. A Gauss-Osztrogradszkij tétel. Legyen V egy a végesben fekvő térfogati tartomány. Jelölje S a V tartomány határfelületét. Legyen továbbá $\mathbf{u}$ a V-n értelmezett egyszer folytonosan deriválható vektormező. Jelölje $\mathbf{n}$ az S felület külső normális egységvektorát. Az

$$\boxed{\int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}A = \int_V \mathbf{u} \cdot \nabla \, \mathrm{d}V} \tag{10.24}$$

Gauss-Osztrogradszkij tétel a (10.20) Green tétel egy általánosításának tekinthető.

Legyen $\mathfrak{D}$ a V-n értelmezett folytonosan deriválható, egyébként tetszőleges tenzormező. A Gauss tétel általánosabb alakja adódik a (10.24) alakból, ha az $\mathbf{u}$ helyére $\mathbf{d}$-t és a skaláris szorzás $\cdot$ műveleti jele helyett $*$-t írunk.

$$\boxed{\int_S \mathfrak{D} * \mathbf{n} \, \mathrm{d}A = \int_V \mathfrak{D} * \nabla \, \mathrm{d}V} \tag{10.25}$$

Ismét hangsúlyozzuk, hogy a $*$ két tenzor között értelmezhető bármilyen szorzást jelölhet.

10.2. Parciális integrálás

10.2.1. Parciális integrálások felületen. Legyen a $d^{kl}{}_{r}$ és e_{kl} az S felületen – v.ö. 10.2. ábra – és annak környezetében értelmezett folytonos és differenciálható tenzormező. Az u_ρ vektormezőt az

$$u_\rho = d^{kl}{}_{\rho}\, e_{kl}$$

módon értelmezzük. A $d^{kl}{}_{r}$ és e_{kl} tenzormezők differenciálhatósága miatt fennáll, hogy

$$u_{\rho\,;\,\alpha} = u_{\rho\,|\,\alpha} = \left(d^{kl}{}_{\rho}\, e_{kl}\right)_{|\,\alpha} = d^{kl}{}_{\rho\,|\,\alpha}\, e_{kl} + d^{kl}{}_{\rho}\, e_{kl\,|\,\alpha}\,.$$

Ez az összefüggést a Stokes tétel (10.14) alatti alakjába helyettesítve a felületi integrálokra vonatkozó egyik parciális integrálási szabály adódik:

$$\boxed{\int_S \varepsilon^{3\sigma\rho} d^{kl}{}_{\rho\,|\,\sigma}\, e_{kl}\,\mathrm{d}A = \oint_h \lambda^\rho\, d^{kl}{}_{\rho}\, e_{kl}\,\mathrm{d}s - \int_S \varepsilon^{3\sigma\rho} d^{kl}{}_{\rho}\, e_{kl\,|\,\sigma}\,\mathrm{d}A} \tag{10.26}$$

A felületi integrálokkal kapcsolatos második parciális integrálási szabály a fentiekhez hasonló módon az

$$u^\rho{}_{\|\,\pi} = \left(d^\rho{}_{\lambda\mu}\, e^{\lambda\mu}\right)_{\|\,\pi} = d^\rho{}_{\lambda\mu\,\|\,\pi}\, e^{\lambda\mu} + d^\rho{}_{\lambda\mu}\, e^{\lambda\mu}{}_{\|\,\pi}$$

összefüggés és a (10.20) Green tétel egybevetéséből kapható meg:

$$\boxed{\int_S d^\rho{}_{\lambda\mu\,\|\,\pi}\, e^{\lambda\mu}\,\mathrm{d}A = \oint_h \nu_\rho\, d^\rho{}_{\lambda\mu}\, e^{\lambda\mu}\mathrm{d}s - \int_S d^\rho{}_{\lambda\mu}\, e^{\lambda\mu}{}_{\|\,\pi}\mathrm{d}A} \tag{10.27}$$

10.2.2. Parciális integrálás térfogati tartományon. Legyen

$$u^k = d^k{}_{lm}\, e^{lm}\,,$$

ahol a $d^k{}_{lm}$ és e^{lm} tenzorok differenciálhatók az S felülettel határolt V térfogati tartományon. Következésképp

$$u^k{}_{;\,k} = \left(d^k{}_{lm}\, e^{lm}\right)_{;\,k} = d^k{}_{lm\,;\,k}\, e^{lm} + d^k{}_{lm}\, e^{lm}{}_{;\,k}$$

Utóbbi egyenlet felhasználásával kapható meg a (10.24) Gauss-Osztrogradszkij tételből a térfogati integrálokkal kapcsolatos

$$\boxed{\int_V d^k{}_{lm\,;\,k}\, e^{lm}\mathrm{d}V = \int_S n_k\, d^k{}_{lm}\, e^{lm}\mathrm{d}A - \int_V d^k{}_{lm}\, e^{lm}{}_{;\,k}\,\mathrm{d}V} \tag{10.28}$$

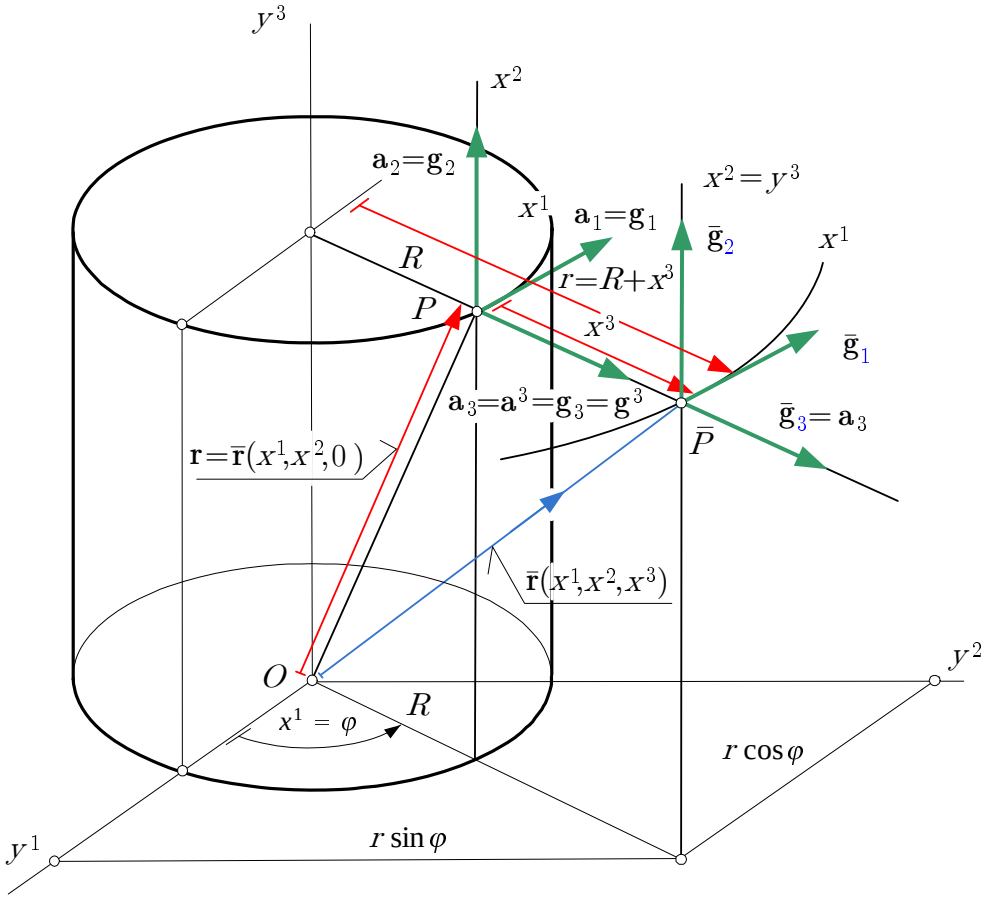
parciális integrálási szabály.

A. FÜGGELÉK

Térbeli felületekre épített koordinátarendszerek

A.1. Hengerfelületre épített koordinátarendszer

Az A.1. ábra egy R sugarú hengerfelületre – ez héjak esetén a héj középfelülete lehet – épített görbevonalú KR-t szemléltet.



A.1. ábra.

Leolvasható az ábráról, hogy

$$x^1=\varphi\,,\quad x^2=y^3\,,\quad x^3=r-R \tag{A.1}$$

a három hengerkoordináta ($x^1\in[-\pi,\pi]$, $x^2=y^3\in(-\infty,\infty)$, $x^3>-R$). A tetszőlegesen választott $\bar{P}$ pont helyvektora az (y^1,y^2,y^3) kartéziuszi KR-ben – a vonatkozó egységvektorokat összhangban az eddigiekkel rendre $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$ és $\mathbf{i}_3$ jelöli – az

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{r}}=\bar{\mathbf{r}}\left(x^1,x^2,x^3\right)=y^1\mathbf{i}_1+y^2\mathbf{i}_2+y^3\mathbf{i}_3=r\cos\varphi\,\mathbf{i}_1+r\sin\varphi\,\mathbf{i}_2+x^2\,\mathbf{i}_3=\\=(R+x^3)\cos x^1\,\mathbf{i}_1+(R+x^3)\sin x^1\,\mathbf{i}_2+x^2\,\mathbf{i}_3\end{aligned} \tag{A.2}$$

alakban írható fel. Következőleg

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{g}}_1 &= \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial x^1} = -(R+x^3)\sin x^1\,\mathbf{i}_1 + (R+x^3)\cos x^1\,\mathbf{i}_2 \\ \bar{\mathbf{g}}_2 &= \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial x^2} = \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial y^3} = \mathbf{i}_3 \\ \bar{\mathbf{g}}_3 &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^3} = \cos x^1\,\mathbf{i}_1 + \sin x^1\,\mathbf{i}_2\end{aligned} \tag{A.3}$$

a három bázisvektor és

$$[\bar{g}_{kl}] = [\bar{\mathbf{g}}_k \cdot \bar{\mathbf{g}}_l] = \begin{bmatrix} (x^3+R)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{A.4}$$

az alsóindexes metrikus tenzor mátrixa. Ennek

$$\bar{g}_\circ = r^2 = (x^3+R)^2 \tag{A.5}$$

a determinánsa. A felsőindexes metrikus tenzor mátrixa az alsóindexes metrikus tenzor mátrixának inverze:

$$[\bar{g}^{pq}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{(x^3+R)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \tag{A.6}$$

A felsőindexes bázisvektorok indexemeléssel számíthatók:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{g}}^1 &= \bar{g}^{1l}\mathbf{g}_l = \bar{g}^{11}\bar{\mathbf{g}}_1 = \frac{1}{R+x^3}\left(-\sin x^1\,\mathbf{i}_1 + \cos x^1\,\mathbf{i}_2\right) \\ \bar{\mathbf{g}}^2 &= \bar{g}^{2l}\bar{\mathbf{g}}_l = \bar{g}^{22}\bar{\mathbf{g}}_2 = \mathbf{i}_3 \\ \bar{\mathbf{g}}^3 &= \bar{g}^{3l}\bar{\mathbf{g}}_l = \bar{g}^{33}\bar{\mathbf{g}}_3 = \bar{\mathbf{g}}_3 = \cos x^1\,\mathbf{i}_1 + \sin x^1\,\mathbf{i}_2\end{aligned} \tag{A.7}$$

A másodfajú Christoffel szimbólumok a

$$\bar{\Gamma}^m_{kl} = \bar{\mathbf{g}}_{k,l} \cdot \bar{\mathbf{g}}^m \tag{A.8}$$

összefüggés felhasználásával adódnak. Az alábbiakban csak a nem azonosan zérus Christoffel szimbólumokat közöljük:

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}^3_{11} = \bar{\mathbf{g}}_{1,1}\cdot\bar{\mathbf{g}}^3 = \frac{\partial \bar{\mathbf{g}}_1}{\partial x^1}\cdot\bar{\mathbf{g}}^3 = \\ = \left[-(R+x^3)\cos x^1\,\mathbf{i}_1 - (R+x^3)\sin x^1\,\mathbf{i}_2\right]\cdot\left(\cos x^1\,\mathbf{i}_1 + \sin x^1\,\mathbf{i}_2\right) = -(R+x^3)\,,\end{aligned} \tag{A.9a}$$

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}^1_{31} = \bar{\mathbf{g}}_{3,1}\cdot\bar{\mathbf{g}}^1 = \frac{\partial \bar{\mathbf{g}}_3}{\partial x^1}\cdot\bar{\mathbf{g}}^1 = \\ = \left(-\sin x^1\,\mathbf{i}_1 + \cos x^1\,\mathbf{i}_2\right)\cdot\frac{1}{R+x^3}\left(-\sin x^1\,\mathbf{i}_1 + \cos x^1\,\mathbf{i}_2\right) = \frac{1}{R+x^3}\,.\end{aligned} \tag{A.9b}$$

Nem nehéz belátni az előzőek alapján, hogy az $x^3 = 0$ hengerfelületen a

$$\begin{aligned}&\mathbf{g}_1 = \mathbf{a}_1 = R\left(-\sin x^1\,\mathbf{i}_1 + \cos x^1\,\mathbf{i}_2\right) \qquad \mathbf{g}_2 = \mathbf{a}_2 = \mathbf{i}_3\,, \quad \mathbf{g}_3 = \mathbf{a}_3 = \cos x^1\,\mathbf{i}_1 + \sin x^1\,\mathbf{i}_2 \\ &\mathbf{g}^1 = \mathbf{a}^1 = \frac{1}{R}\left(-\sin x^1\,\mathbf{i}_1 + \cos x^1\,\mathbf{i}_2\right)\,, \quad \mathbf{g}^2 = \mathbf{a}^2 = \mathbf{i}_3\,, \quad \mathbf{g}^3 = \mathbf{a}^3 = \cos x^1\,\mathbf{i}_1 + \sin x^1\,\mathbf{i}_2\end{aligned} \tag{A.10}$$

összefüggések adják a bázisvektorokat. A metrikus tenzorokat, illetve a nem zérus Christoffel szimbólumokat tekintve pedig az

$$[g_{kl}] = [a_{kl}] = \begin{bmatrix} R^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\,, \qquad [g^{pq}] = [a^{pq}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{R^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\,, \tag{A.11}$$

illetve a

$$\Gamma^3_{11} = -R\,, \qquad \Gamma^1_{31} = \frac{1}{R}\,. \tag{A.12}$$

képletek használhatók. A Christoffel szimbólumok birtokában

$$[b_{\alpha\beta}] = [\Gamma^3_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} -R & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad [b_\alpha{}^\mu] = -[\Gamma^\mu_{\alpha 3}] = \begin{bmatrix} -1/R & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{A.13}$$

a két görbületi tenzor mátrixa. A bázisvektorok $\bar{P}$ pontból a P pontba történő áthelyezésének tenzora (a tenzor mátrixa) a (9.48) képlet alapján $(A.13)_2$ felhasználásával számítható:

$$[g_\alpha{}^\nu] = [\delta_\alpha{}^\nu - x^3 b_\alpha{}^\nu] = \begin{bmatrix} 1+x^3/R & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{A.14}$$

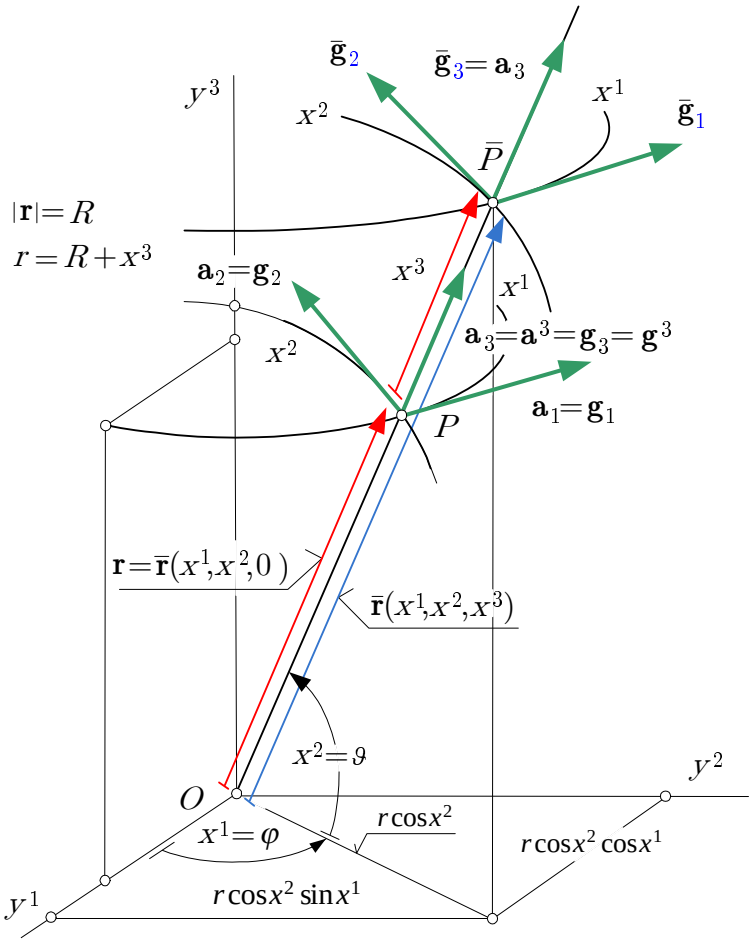
Ennek a tenzornak

$$[g_\kappa{}^\nu] = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+x^3/R} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{A.15}$$

az inverze.

A.2. Gömbfelületre épített koordinátarendszer

Az A.2. ábra egy az R sugarú gömbfelületre – ez héjak esetén a héj középfelülete lehet – épített görbevonalú KR-t (ekvatoriális KR-t) szemléltet.



A.2. ábra.

Leolvasható az ábráról, hogy

$$x^1 = \varphi, \quad x^2 = \vartheta, \quad x^3 = r - R \tag{A.16}$$

a három gömbi koordináta ($x^1 \in [0, 2\pi]$, $x^2 \in [-\pi, \pi]$, $x^3 > -R$). A tetszőlegesen választott $\bar{P}$ pont helyvektora az (y^1, y^2, y^3) kartéziuszi KR-ben – a vonatkozó egységvektorokat rendre $\mathbf{i}_1$,$\mathbf{i}_2$ és $\mathbf{i}_3$

jelöli – az

$$\text{(A.17)}\quad \bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}}\left(x^1, x^2, x^3\right) = y^1\mathbf{i}_1 + y^2\mathbf{i}_2 + y^3\mathbf{i}_3 = r\cos\vartheta\cos\varphi\,\mathbf{i}_1 + r\cos\vartheta\sin\varphi\,\mathbf{i}_2 + r\sin\vartheta\,\mathbf{i}_3 = \\ = r\cos x^2\cos x^1\,\mathbf{i}_1 + r\cos x^2\sin x^1\,\mathbf{i}_2 + r\sin x^2\,\mathbf{i}_3$$

módon írható fel. Következőleg

$$\text{(A.18)}\quad \begin{aligned} \bar{\mathbf{g}}_1 &= \frac{\partial\bar{\mathbf{r}}}{\partial x^1} = \frac{\partial\bar{\mathbf{r}}}{\partial\varphi} = r\left(-\cos x^2\sin x^1\,\mathbf{i}_1 + \cos x^2\cos x^1\,\mathbf{i}_2\right) \\ \bar{\mathbf{g}}_2 &= \frac{\partial\bar{\mathbf{r}}}{\partial x^2} = \frac{\partial\bar{\mathbf{r}}}{\partial\varphi} = r\left(-\sin x^2\cos x^1\,\mathbf{i}_1 - \sin x^2\sin x^1\,\mathbf{i}_2 + \cos x^2\,\mathbf{i}_3\right) \\ \bar{\mathbf{g}}_3 &= \frac{\partial\bar{\mathbf{r}}}{\partial x^3} = \frac{\partial\bar{\mathbf{r}}}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x^3} = \cos x^2\cos x^1\,\mathbf{i}_1 + \cos x^2\sin x^1\,\mathbf{i}_2 + \sin x^2\,\mathbf{i}_3 \end{aligned}$$

a három bázisvektor és

$$\text{(A.19)}\quad [\bar{g}_{kl}] = [\bar{\mathbf{g}}_k\cdot\bar{\mathbf{g}}_l] = \begin{bmatrix} r^2\cos^2 x^2 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(x^3+R\right)^2\cos^2 x^2 & 0 & 0 \\ 0 & \left(x^3+R\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

az alsóindexes metrikus tenzor mátrixa. Ennek

$$\text{(A.20)}\quad \bar{g}_\circ = r^4\cos^2 x^2 = \left(x^3+R\right)^4\cos^2 x^2$$

a determinánsa. A felsőindexes metrikus tenzor mátrixa az alsóindexes metrikus tenzor mátrixának inverze:

$$\text{(A.21)}\quad [\bar{g}^{pq}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{r^2\cos^2 x^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\left(x^3+R\right)^2\cos^2 x^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\left(x^3+R\right)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A felsőindexes bázisvektorok indexemeléssel adódnak:

(A.22)

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{g}}^1 &= \bar{g}^{1l}\bar{\mathbf{g}}_l = \bar{g}^{11}\bar{\mathbf{g}}_1 = \frac{1}{r\cos x^2}\left(-\sin x^1\,\mathbf{i}_1 + \cos x^1\,\mathbf{i}_2\right) = \frac{1}{\left(R+x^3\right)\cos x^2}\left(-\sin x^1\,\mathbf{i}_1 + \cos x^1\,\mathbf{i}_2\right), \\ \bar{\mathbf{g}}^2 &= \bar{g}^{2l}\bar{\mathbf{g}}_l = \bar{g}^{22}\bar{\mathbf{g}}_2 = \frac{1}{r}\left(-\sin x^2\cos x^1\,\mathbf{i}_1 - \sin x^2\sin x^1\,\mathbf{i}_2 + \cos x^2\,\mathbf{i}_3\right) = \\ &= \frac{1}{R+x^3}\left(-\sin x^2\cos x^1\,\mathbf{i}_1 - \sin x^2\sin x^1\,\mathbf{i}_2 + \cos x^2\,\mathbf{i}_3\right), \\ \bar{\mathbf{g}}^3 &= \bar{g}^{3l}\bar{\mathbf{g}}_l = \bar{g}^{33}\bar{\mathbf{g}}_3 = \bar{\mathbf{g}}_3\,. \end{aligned}$$

A másodfajú Christoffel szimbólumok a

$$\text{(A.23)}\quad \bar{\Gamma}^m_{kl} = \bar{\mathbf{g}}_{k,l}\cdot\bar{\mathbf{g}}^m$$

összefüggés felhasználásával számíthatók. Az alábbiakban csak a nem azonosan zérus Christoffel szimbólumokat közöljük:

$$\text{(A.24a)}\quad \bar{\Gamma}^3_{11} = \bar{\mathbf{g}}_{1,1}\cdot\bar{\mathbf{g}}^3 = \frac{\partial\bar{\mathbf{g}}_1}{\partial x^1}\cdot\bar{\mathbf{g}}^3 = \\ = -r\left(\cos x^2\cos x^1\,\mathbf{i}_1 + \cos x^2\sin x^1\,\mathbf{i}_2\right)\cdot\left(\cos x^2\cos x^1\,\mathbf{i}_1 + \cos x^2\sin x^1\,\mathbf{i}_2 + \sin x^2\,\mathbf{i}_3\right) = \\ = -r\cos^2 x^2 = -\left(R+x^3\right)\cos^2 x^2\,,$$

$$\text{(A.24b)}\quad \bar{\Gamma}^3_{22} = \bar{\mathbf{g}}_{2,2}\cdot\bar{\mathbf{g}}^3 = \frac{\partial\bar{\mathbf{g}}_2}{\partial x^2}\cdot\bar{\mathbf{g}}^3 = \\ = -r\left(\cos x^2\cos x^1\,\mathbf{i}_1 + \cos x^2\sin x^1\,\mathbf{i}_2 + \sin x^2\,\mathbf{i}_3\right)\cdot\left(\cos x^2\cos x^1\,\mathbf{i}_1 + \cos x^2\sin x^1\,\mathbf{i}_2 + \sin x^2\,\mathbf{i}_3\right) = \\ = -r = -\left(R+x^3\right),$$

(A.24c) $\bar{\Gamma}^1_{31} = \bar{\mathbf{g}}_{3,1}\cdot\bar{\mathbf{g}}^1 = \dfrac{\partial\bar{\mathbf{g}}_3}{\partial x^1}\cdot\bar{\mathbf{g}}^1 =$

$$= \left(-\cos x^2\sin x^1\,\mathbf{i}_1+\cos x^2\cos x^1\,\mathbf{i}_2\right)\cdot\frac{1}{r\cos x^2}\left(-\sin x^1\,\mathbf{i}_1+\cos x^1\,\mathbf{i}_2\right)=\frac{1}{r}=\frac{1}{R+x^3}\,,$$

(A.24d) $\bar{\Gamma}^2_{32} = \bar{\mathbf{g}}_{3,2}\cdot\bar{\mathbf{g}}^2 = \dfrac{\partial\bar{\mathbf{g}}_3}{\partial x^2}\cdot\bar{\mathbf{g}}^2 =$

$$=\left(-\sin x^2\cos x^1\,\mathbf{i}_1-\sin x^2\sin x^1\,\mathbf{i}_2+\cos x^2\,\mathbf{i}_3\right)\cdot\frac{1}{r}\left(-\sin x^2\cos x^1\,\mathbf{i}_1-\sin x^2\sin x^1\,\mathbf{i}_2+\cos x^2\,\mathbf{i}_3\right)=$$

$$=\frac{1}{r}=\frac{1}{R+x^3}\,,$$

(A.24e) $\bar{\Gamma}^2_{11} = \bar{\mathbf{g}}_{1,1}\cdot\bar{\mathbf{g}}^2 = \dfrac{\partial\bar{\mathbf{g}}_1}{\partial x^1}\cdot\bar{\mathbf{g}}^2 =$

$$= -r\left(\cos x^2\cos x^1\,\mathbf{i}_1+\cos x^2\sin x^1\,\mathbf{i}_2\right)\cdot\frac{1}{r}\left(-\sin x^2\cos x^1\,\mathbf{i}_1-\sin x^2\sin x^1\,\mathbf{i}_2+\cos x^2\,\mathbf{i}_3\right)=$$

$$=\cos x^2\sin x^2\,,$$

(A.24f) $\bar{\Gamma}^1_{12} = \bar{\mathbf{g}}_{1,2}\cdot\bar{\mathbf{g}}^1 = \dfrac{\partial\bar{\mathbf{g}}_1}{\partial x^2}\cdot\bar{\mathbf{g}}^1 =$

$$= r\left(\sin x^2\sin x^1\,\mathbf{i}_1-\sin x^2\cos x^1\,\mathbf{i}_2\right)\cdot\frac{1}{r\cos x^2}\left(-\sin x^1\,\mathbf{i}_1+\cos x^1\,\mathbf{i}_2\right)=-\frac{\sin x^2}{\cos x^2}\,.$$

Az $x^3=0$ gömbfelületen az (A.18) és (A.22) képletek alapján

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_1 =&\mathbf{a}_1 = R\left(-\cos x^2\sin x^1\,\mathbf{i}_1+\cos x^2\cos x^1\,\mathbf{i}_2\right)\,,\\ \mathbf{g}_2 =&\mathbf{a}_2 = R\left(-\sin x^2\cos x^1\,\mathbf{i}_1-\sin x^2\sin x^1\,\mathbf{i}_2+\cos x^2\,\mathbf{i}_3\right)\,,\\ \mathbf{g}_3 =&\mathbf{a}_3 = \cos x^2\cos x^1\,\mathbf{i}_1+\cos x^2\sin x^1\,\mathbf{i}_2+\sin x^2\,\mathbf{i}_3\end{aligned}\tag{A.25}$$

a három bázisvektor és

$$\begin{aligned}\mathbf{g}^1 =&\mathbf{a}^1 = \frac{1}{R\cos x^2}\left(-\sin x^1\,\mathbf{i}_1+\cos x^1\,\mathbf{i}_2\right)\,,\\ \mathbf{g}^2 =&\mathbf{a}^2 = \frac{1}{R}\left(-\sin x^2\cos x^1\,\mathbf{i}_1-\sin x^2\sin x^1\,\mathbf{i}_2+\cos x^2\,\mathbf{i}_3\right)\,,\\ \mathbf{g}^3 =&\mathbf{a}^3 = \mathbf{g}_3 = \mathbf{a}_3\end{aligned}\tag{A.26}$$

a három reciprok bázisvektor. Ami a metrikus tenzorokat illeti az (A.19) és (A.21) képletek alapján írhatjuk, hogy

$$[g_{kl}]=[a_{kl}]=\begin{bmatrix}R^2\cos^2x^2 & 0 & 0\\ 0 & R^2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\,,\qquad [g^{pq}]=[a^{pq}]=\begin{bmatrix}\frac{1}{R^2\cos^2x^2} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{R^2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\,.\tag{A.27}$$

A gömbfelületen az (A.24) képletek alapján

$$\begin{aligned}&\Gamma^3_{11}=-R\cos^2x^2\,,\quad \Gamma^3_{22}=-R\,, && \Gamma^1_{31}=\frac{1}{R}\,,\\ &\Gamma^2_{32}=\frac{1}{R}\,, && \Gamma^2_{11}=\cos x^2\sin x^2\,,\quad \Gamma^1_{12}=-\frac{\sin x^2}{\cos x^2}\end{aligned}\tag{A.28}$$

a nem azonosan zérus Christoffel szimbólumok értéke.

Ezek birtokában azonnal adódnak a görbületi tenzorok mátrixai:

$$[b_{\alpha\beta}]=\left[\Gamma^3_{\alpha\beta}\right]=\begin{bmatrix}-R\cos^2x^2 & 0\\ 0 & -R\end{bmatrix}\tag{A.29a}$$

és

$$\left[b^\lambda_\kappa\right]=\left[g^{\lambda\nu}b_{\nu\kappa}\right]=\begin{bmatrix}-\frac{1}{R} & 0\\ 0 & -\frac{1}{R}\end{bmatrix}\,.\tag{A.29b}$$

Az (A.29a) összefüggés felhasználásával rögtön számítható a $g_\alpha{}^\nu$ áthelyező tenzor mátrixa:

$$[g_\alpha{}^\nu] = \left[\delta_\alpha{}^\nu - x^3 b_\alpha{}^\nu\right] = \begin{bmatrix} 1+x^3/R & 0 \\ 0 & 1+x^3/R \end{bmatrix}, \tag{A.30a}$$

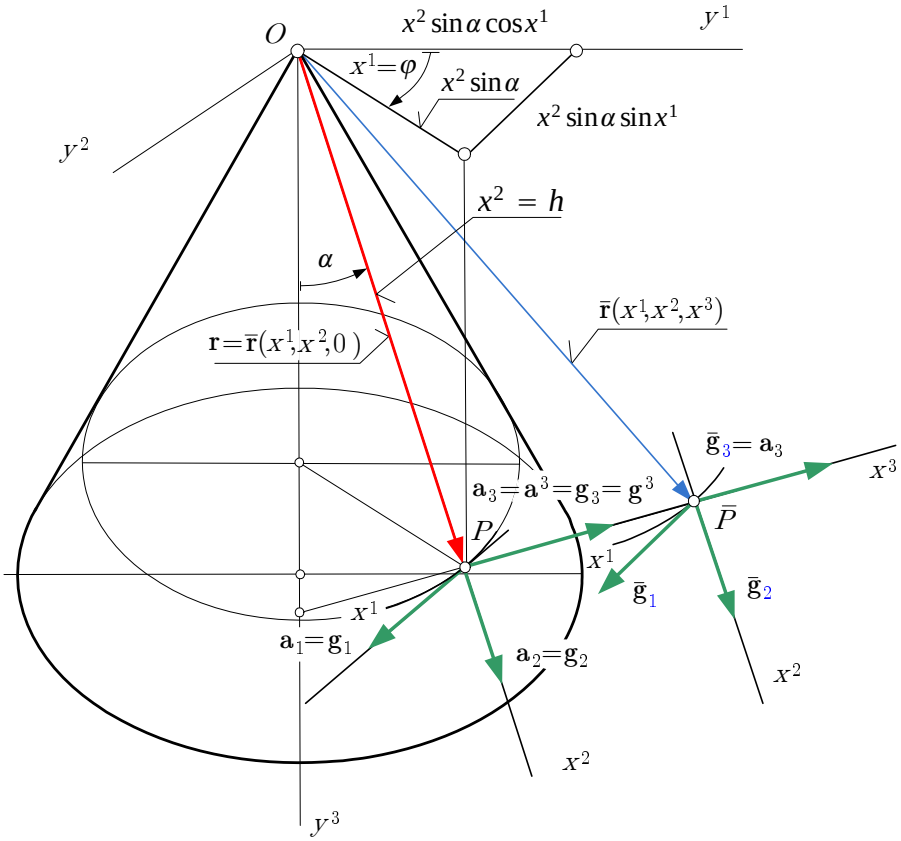
amivel

$$[g_\kappa{}^\nu] = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+x^3/R} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+x^3/R} \end{bmatrix}. \tag{A.30b}$$

az inverz.

A.3. Kúpfelületre épített koordinátarendszer

Az A.3. ábra egy α félnyílásszögű kúpfelületre - ez héjak esetén a héj középfelülete lehet – épített görbevonalú KR-t szemléltet.



A.3. ábra.

Leolvasható az ábráról, hogy $x^1=\varphi$, x^2 az origó és a P pont közötti távolság, x^3 pedig a P és $\bar{P}$ pontok közötti előjeles távolság, pozitív, ha a $\bar{P}$ pont a kúpfelületen kívül helyezkedik el, negatív, ha a kúpfelületen belül fekszik. A kúp csúcspontja szinguláris pont. Nyilvánvaló, hogy $x^1 \in [-\pi,\pi]$, $x^2>0$ és hogy $x^3 \in \left(-x^2\sin\alpha,\infty\right]$. A kúpfelület P pontjának helyvektora az (y^1,y^2,y^3) kartéziuszi KR-ben – a vonatkozó egységvektorokat összhangban az eddigiekkel rendre $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$ és $\mathbf{i}_3$ jelöli – az

$$\mathbf{r} = \bar{\mathbf{r}}\left(x^1,x^2,0\right) = y^1\mathbf{i}_1 + y^2\mathbf{i}_2 + y^3\mathbf{i}_3 = h\cos\varphi\,\sin\alpha\,\mathbf{i}_1 + h\sin\varphi\,\sin\alpha\,\mathbf{i}_2 + h\cos\alpha\,\mathbf{i}_3 = \\ = x^2\cos x^1\,\sin\alpha\,\mathbf{i}_1 + x^2\sin x^1\,\sin\alpha\,\mathbf{i}_2 + x^2\cos\alpha\,\mathbf{i}_3 \tag{A.31}$$

módon írható fel. Következőleg

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_1 = \mathbf{a}_1 = &\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^1} = x^2\left(-\sin x^1\,\mathbf{i}_1 + \cos x^1\,\mathbf{i}_2\right)\sin\alpha \\ \mathbf{g}_2 = \mathbf{a}_2 = &\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^2} = \left(\cos x^1\,\mathbf{i}_1 + \sin x^1\,\mathbf{i}_2\right)\sin\alpha + \cos\alpha\,\mathbf{i}_3\end{aligned} \tag{A.32}$$

a két bázisvektor a kúpfelületen. A harmadik bázisvektor a

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_1\times\mathbf{g}_2 &= \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ -x^2\sin x^1\sin\alpha & x^2\cos x^1\sin\alpha & 0 \\ \cos x^1\sin\alpha & \sin x^1\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \\ &= x^2\left(\cos x^1\,\mathbf{i}_1 + \sin x^1\,\mathbf{i}_2\right)\sin\alpha\cos\alpha - x^2\sin^2\alpha\,\mathbf{i}_3\end{aligned}$$

vektorszorzat

$$|\mathbf{g}_1\times\mathbf{g}_2| = x^2\sin\alpha$$

abszolut értékének felhasználásával számítható

$$\mathbf{g}_3 = \mathbf{a}_3 = \frac{\mathbf{g}_1\times\mathbf{g}_2}{|\mathbf{g}_1\times\mathbf{g}_2|} = \left(\cos x^1\,\mathbf{i}_1 + \sin x^1\,\mathbf{i}_2\right)\cos\alpha - \mathbf{i}_3\sin\alpha \tag{A.33}$$

A bázisvektorok birtokában

$$[g_{k\ell}] = [a_{k\ell}] = [\mathbf{a}_k\cdot\mathbf{a}_\ell] = \begin{bmatrix} \left(x^2\right)^2\sin^2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{A.34}$$

az alsóindexes metrikus tenzor mátrixa. Ennek

$$g_\circ = \left(x^2\right)^2\sin^2\alpha \tag{A.35}$$

a determinánsa. A felsőindexes metrikus tenzor mátrixa az alsóindexes metrikus tenzor mátrixának inverze:

$$[g^{pq}] = [a^{pq}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\left(x^2\right)^2\sin^2\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{A.36}$$

A felsőindexes bázisvektorok indexemeléssel számíthatók:

$$\begin{aligned}\mathbf{g}^1 &= g^{1\ell}\mathbf{g}_\ell = g^{11}\mathbf{g}_1 = \frac{1}{x^2\sin\alpha}\left(-\sin x^1\,\mathbf{i}_1 + \cos x^1\,\mathbf{i}_2\right), \\ \mathbf{g}^2 &= g^{2\ell}\mathbf{g}_\ell = g^{22}\mathbf{g}_2 = \mathbf{g}_2 = \left(\cos x^1\,\mathbf{i}_1 + \sin x^1\,\mathbf{i}_2\right)\sin\alpha + \cos\alpha\,\mathbf{i}_3, \\ \mathbf{g}^3 &= \mathbf{a}^3 = \mathbf{g}_3 = \mathbf{a}_3 = \left(\cos x^1\,\mathbf{i}_1 + \sin x^1\,\mathbf{i}_2\right)\cos\alpha - \sin\alpha\,\mathbf{i}_3.\end{aligned} \tag{A.37}$$

A $\bar{P}$ pontnak

$$\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{r} + x^3\mathbf{g}_3 \tag{A.38}$$

a helyvektora. Következésképp

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{g}}_1 = \frac{\partial\bar{\mathbf{r}}}{\partial x^1} &= \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x^1} + x^3\frac{\partial\mathbf{g}_3}{\partial x^1} = \\ &= \mathbf{g}_1 + \frac{x^3}{x^2}\underbrace{x^2\left(-\sin x^1\,\mathbf{i}_1 + \cos x^1\,\mathbf{i}_2\right)\sin\alpha}_{\mathbf{g}_1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \left(1 + \frac{x^3}{x^2}\mathrm{ctg}\alpha\right)\mathbf{g}_1 = \\ &= \left(x^2\sin\alpha + x^3\cos\alpha\right)\left(-\sin x^1\,\mathbf{i}_1 + x^2\cos x^1\,\mathbf{i}_2\right),\end{aligned} \tag{A.39a}$$

$$\bar{\mathbf{g}}_2 = \frac{\partial\bar{\mathbf{r}}}{\partial x^2} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x^2} + x^3\underbrace{\frac{\partial\mathbf{g}_3}{\partial x^2}}_{=0} = \mathbf{g}_2 = \left(\cos x^1\,\mathbf{i}_1 + \sin x^1\,\mathbf{i}_2\right)\sin\alpha + \cos\alpha\,\mathbf{i}_3, \tag{A.39b}$$

$$\bar{\mathbf{g}}_3 = \frac{\partial\bar{\mathbf{r}}}{\partial x^3} = \mathbf{g}^3 = \mathbf{a}^3 = \mathbf{g}_3 = \mathbf{a}_3 = \left(\cos x^1\,\mathbf{i}_1 + \sin x^1\,\mathbf{i}_2\right)\cos\alpha - \sin\alpha\,\mathbf{i}_3 \tag{A.39c}$$

a három alsóindexes bázisvektor,

$$[\bar{g}_{k\ell}] = [\bar{\mathbf{g}}_k \cdot \bar{\mathbf{g}}_\ell] = \begin{bmatrix} \left(x^2 \sin\alpha + x^3 \cos\alpha\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{A.40}$$

a kovariáns metrikus tenzor mátrixa, amelynek

$$[\bar{g}^{pq}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\left(x^2 \sin\alpha + x^3 \cos\alpha\right)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{A.41}$$

az inverze. Ez egyben a kontravariáns mértéktenzor mátrixa. Az utóbbi és az (A.39) képleteket felhasználva kapjuk meg a kontravariáns bázisvektorokat:

$$\bar{\mathbf{g}}^1 = \bar{g}^{11}\bar{\mathbf{g}}_1 = \frac{1}{x^2 \sin\alpha + x^3 \cos\alpha}\left(-\sin x^1\, \mathbf{i}_1 + \cos x^1\, \mathbf{i}_2\right), \tag{A.42a}$$

$$\bar{\mathbf{g}}^2 = \bar{g}^{22}\bar{\mathbf{g}}_2 = \bar{\mathbf{g}}_2 = \left(\cos x^1\, \mathbf{i}_1 + \sin x^1\, \mathbf{i}_2\right)\sin\alpha + \cos\alpha\, \mathbf{i}_3, \tag{A.42b}$$

$$\bar{\mathbf{g}}^3 = \mathbf{g}^3 = \mathbf{a}^3 = \mathbf{g}_3 = \mathbf{a}_3 = \left(\cos x^1\, \mathbf{i}_1 + \sin x^1\, \mathbf{i}_2\right)\cos\alpha - \sin\alpha\, \mathbf{i}_3. \tag{A.42c}$$

Az alábbiakban a nem azonosan zérus Christoffel szimbólumok számítását tekintjük át:

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}^3_{11} = \bar{\mathbf{g}}_{1,1}\cdot\bar{\mathbf{g}}^3 = \frac{\partial\bar{\mathbf{g}}_1}{\partial x^1}\cdot\bar{\mathbf{g}}^3 &= \left\{\frac{\partial}{\partial x^1}\left(x^2\sin\alpha + x^3\cos\alpha\right)\left(-\sin x^1\, \mathbf{i}_1 + x^2\cos x^1\, \mathbf{i}_2\right)\right\}\cdot\bar{\mathbf{g}}^3 = \\ &= -\left(x^2\sin\alpha + x^3\cos\alpha\right)\left(\cos x^1\, \mathbf{i}_1 + \sin x^1\, \mathbf{i}_2\right)\cdot\left[\left(\cos x^1\, \mathbf{i}_1 + \sin x^1\, \mathbf{i}_2\right)\cos\alpha - \sin\alpha\, \mathbf{i}_3\right] = \\ &= -\left(x^2\sin\alpha + x^3\cos\alpha\right)\cos\alpha \end{aligned} \tag{A.43a}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}^1_{31} = \bar{\mathbf{g}}_{3,1}\cdot\bar{\mathbf{g}}^1 = \frac{\partial\bar{\mathbf{g}}_3}{\partial x^1}\cdot\bar{\mathbf{g}}^1 &= \\ = \frac{1}{x^2\sin\alpha + x^3\cos\alpha}\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\cos x^1\, \mathbf{i}_1 + \sin x^1\, \mathbf{i}_2\right)\sin\alpha\right\}\cdot\left(-\sin x^1\, \mathbf{i}_1 + \cos x^1\, \mathbf{i}_2\right) &= \\ \frac{\sin\alpha}{x^2\sin\alpha + x^3\cos\alpha}\left(-\sin x^1\, \mathbf{i}_1 + \cos x^1\, \mathbf{i}_2\right)\cdot\left(-\sin x^1\, \mathbf{i}_1 + \cos x^1\, \mathbf{i}_2\right) &= \frac{\sin\alpha}{x^2\sin\alpha + x^3\cos\alpha} \end{aligned} \tag{A.43b}$$

A kúpfelületen a görbületi tenzorok mátrixai tekintetében a

$$[b_{\alpha\beta}] = \bar{\Gamma}^3_{\alpha\beta}\big|_{x^3=0} = \begin{bmatrix} -\left(x^2\sin\alpha + x^3\cos\alpha\right)\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\Bigg|_{x^3=0} = \begin{bmatrix} -x^2\sin\alpha\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{A.44a}$$

és

$$\left[b^\lambda_\kappa\right] = \left[g^{\lambda\nu}b_{\nu\kappa}\right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\left(x^2\sin\alpha + x^3\cos\alpha\right)^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\left(x^2\sin\alpha + x^3\cos\alpha\right)\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\Bigg|_{x^3=0} = \\ = \begin{bmatrix} -\frac{\cos\alpha}{x^2\sin\alpha} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{A.44b}$$

összefüggéseket kapjuk.

A bázisvektorok P pontból a $\bar{P}$ pontba történő áthelyezésének tenzora az (A.44b)képletek alapján számítható:

$$[g_\alpha{}^\nu] = \left[\delta_\alpha{}^\nu - x^3 b_\alpha{}^\nu\right] = \begin{bmatrix} 1 + \frac{x^3}{x^2}\mathrm{ctg}\alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{A.45a}$$

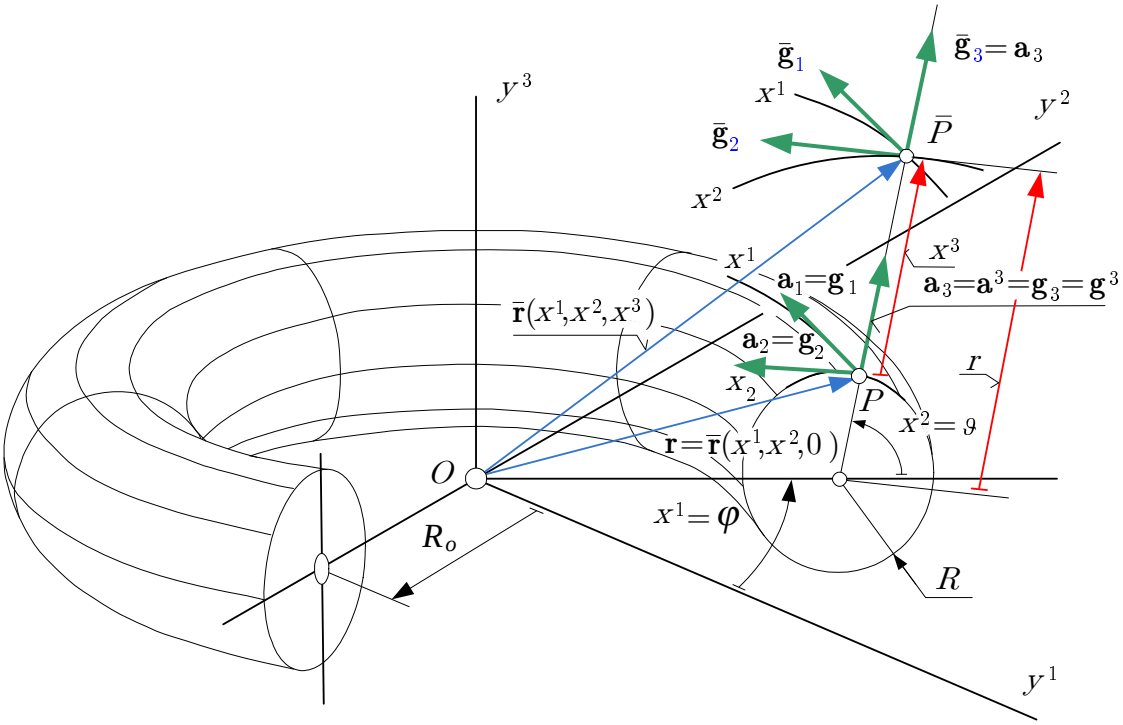
Ennek

$$[g_\alpha{}^\nu] = \begin{bmatrix} \frac{x^2}{x^2 + x^3\mathrm{ctg}\alpha} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{A.45b}$$

az inverze.

A.4. Toruszfelületre épített koordinátarendszer

Az A.4. ábra az R_o középkörű és R sugarú toruszfelületre - ez héjak esetén a héj középfelülete lehet – épített görbevonalú KR-t szemléltet.



A.4. ábra.

Leolvasható az ábráról, hogy

$$x^1=\varphi\,,\quad x^2=\vartheta\,,\quad x^3=r-R \tag{A.46}$$

a három tóruszi koordináta ($x^1\in[0{,}2\pi]$, $x^2\in[-\pi,\pi]$, $x^3>-R$). A tetszőlegesen választott $\bar{P}$ pont helyvektora az (y^1,y^2,y^3) kartéziuszi KR-ben – a vonatkozó egységvektorokat rendre $\mathbf{i}_1$,$\mathbf{i}_2$ és $\mathbf{i}_3$ jelöli – az

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{r}}=\bar{\mathbf{r}}\left(x^1,x^2,x^3\right)&=y^1\mathbf{i}_1+y^2\mathbf{i}_2+y^3\mathbf{i}_3=\\&=\left(R_o+r\cos\vartheta\right)\cos\varphi\,\mathbf{i}_1+\left(R_o+r\cos\vartheta\right)\sin\varphi\,\mathbf{i}_2+r\sin\vartheta\,\mathbf{i}_3=\\&=\left[R_o+\left(R+x^3\right)\cos x^2\right]\cos x^1\,\mathbf{i}_1+\left[R_o+\left(R+x^3\right)\cos x^2\right]\sin x^1\,\mathbf{i}_2+\left(R+x^3\right)\sin x^2\,\mathbf{i}_3\end{aligned} \tag{A.47}$$

alakban írható fel. alakban írható fel. A helyvektor ismeretében

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{g}}_1&=\frac{\partial\bar{\mathbf{r}}}{\partial x^1}=-\left[R_o+\left(R+x^3\right)\cos x^2\right]\sin x^1\,\mathbf{i}_1+\left[R_o+\left(R+x^3\right)\cos x^2\right]\cos x^1\,\mathbf{i}_2\\\bar{\mathbf{g}}_2&=\frac{\partial\bar{\mathbf{r}}}{\partial x^2}=-\left(R+x^3\right)\sin x^2\cos x^1\,\mathbf{i}_1-\left(R+x^3\right)\sin x^2\sin x^1\,\mathbf{i}_2+\left(R+x^3\right)\cos x^2\,\mathbf{i}_3\\\bar{\mathbf{g}}_3&=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x^3}=\cos x^2\cos x^1\,\mathbf{i}_1+\cos x^2\sin x^1\,\mathbf{i}_2+\sin x^2\,\mathbf{i}_3\end{aligned} \tag{A.48}$$

a három bázisvektor és

$$[\bar{g}_{kl}]=[\bar{\mathbf{g}}_k\cdot\bar{\mathbf{g}}_l]=\begin{bmatrix}\left[R_o+\left(R+x^3\right)\cos x^2\right]^2 & 0 & 0\\ 0 & \left(R+x^3\right)^2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{A.49}$$

az alsóindexes metrikus tenzor mátrixa. Ennek a mátrixnak

$$\bar{g}_\circ=\left[R_o+\left(R+x^3\right)\cos x^2\right]^2\left(R+x^3\right)^2 \tag{A.50}$$

a determinánsa. A felsőindexes metrikus tenzor mátrixa az alsóindexes metrikus tenzor mátrixának inverze:

$$[\bar{g}^{pq}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{r^2\cos^2 x^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{[R_o+(R+x^3)\cos x^2]^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(R+x^3)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \tag{A.51}$$

A felsőindexes bázisvektorok indexemeléssel adódnak:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{g}}^1 &= \bar{g}^{1l}\bar{\mathbf{g}}_l = \bar{g}^{11}\bar{\mathbf{g}}_1 = \frac{1}{R_o+(R+x^3)\cos x^2}\left\{-\sin x^1\,\mathbf{i}_1+\cos x^1\,\mathbf{i}_2\right\} \\ \bar{\mathbf{g}}^2 &= \bar{g}^{2l}\bar{\mathbf{g}}_l = \bar{g}^{22}\bar{\mathbf{g}}_2 = \frac{1}{(R+x^3)^2}\left(-\sin x^2\cos x^1\,\mathbf{i}_1-\sin x^2\sin x^1\,\mathbf{i}_2+\cos x^2\,\mathbf{i}_3\right) \\ \bar{\mathbf{g}}^3 &= \bar{g}^{3l}\bar{\mathbf{g}}_l = \bar{g}^{33}\bar{\mathbf{g}}_3 = \bar{\mathbf{g}}_3 . \end{aligned} \tag{A.52}$$

Az alábbiak a nem azonosan zérus Christoffel szimbólumok:

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}^3_{11} &= \bar{\mathbf{g}}_{1,1}\cdot\bar{\mathbf{g}}^3 = \frac{\partial\bar{\mathbf{g}}_1}{\partial x^1}\cdot\bar{\mathbf{g}}^3 = \\ &-\left\{\left[R_o+\left(R+x^3\right)\cos x^2\right]\left(\cos x^1\,\mathbf{i}_1+\sin x^1\,\mathbf{i}_2\right)\right\}\cdot\left(\cos x^2\cos x^1\,\mathbf{i}_1+\cos x^2\sin x^1\,\mathbf{i}_2+\sin x^2\,\mathbf{i}_3\right) = \\ &= -\left[R_o+\left(R+x^3\right)\cos x^2\right]\cos x^2 , \end{aligned} \tag{A.53a}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}^3_{22} &= \bar{\mathbf{g}}_{2,2}\cdot\bar{\mathbf{g}}^3 = \frac{\partial\bar{\mathbf{g}}_2}{\partial x^2}\cdot\bar{\mathbf{g}}^3 = -\left\{\left(R+x^3\right)\left(\cos x^2\cos x^1\,\mathbf{i}_1+\cos x^2\sin x^1\,\mathbf{i}_2+\sin x^2\,\mathbf{i}_3\right)\right\}\cdot \\ &\left(\cos x^2\cos x^1\,\mathbf{i}_1+\cos x^2\sin x^1\,\mathbf{i}_2+\sin x^2\,\mathbf{i}_3\right) = -\left(R+x^3\right) , \end{aligned} \tag{A.53b}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}^1_{31} &= \bar{\mathbf{g}}_{3,1}\cdot\bar{\mathbf{g}}^1 = \frac{\partial\bar{\mathbf{g}}_3}{\partial x^1}\cdot\bar{\mathbf{g}}^1 = \\ &= \left(-\cos x^2\sin x^1\,\mathbf{i}_1+\cos x^2\cos x^1\,\mathbf{i}_2\right)\cdot\frac{1}{R_o+(R+x^3)\cos x^2}\left\{-\sin x^1\,\mathbf{i}_1+\cos x^1\,\mathbf{i}_2\right\} = \\ &= \frac{\cos x^2}{R_o+(R+x^3)\cos x^2} , \end{aligned} \tag{A.53c}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}^2_{32} &= \bar{\mathbf{g}}_{3,2}\cdot\bar{\mathbf{g}}^2 = \frac{\partial\bar{\mathbf{g}}_3}{\partial x^2}\cdot\bar{\mathbf{g}}^2 = \left(-\sin x^2\cos x^1\,\mathbf{i}_1-\sin x^2\sin x^1\,\mathbf{i}_2+\cos x^2\,\mathbf{i}_3\right)\cdot \\ &\frac{1}{R+x^3}\left(-\sin x^2\cos x^1\,\mathbf{i}_1-\sin x^2\sin x^1\,\mathbf{i}_2+\cos x^2\,\mathbf{i}_3\right) = \frac{1}{R+x^3} \end{aligned} \tag{A.53d}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}^2_{11} &= \bar{\mathbf{g}}_{1,1}\cdot\bar{\mathbf{g}}^2 = \frac{\partial\bar{\mathbf{g}}_1}{\partial x^1}\cdot\bar{\mathbf{g}}^2 = -\left[R_o+\left(R+x^3\right)\cos x^2\right]\left(\cos x^1\,\mathbf{i}_1+\sin x^1\,\mathbf{i}_2\right)\cdot \\ &\frac{1}{R+x^3}\left(-\sin x^2\cos x^1\,\mathbf{i}_1-\sin x^2\sin x^1\,\mathbf{i}_2+\cos x^2\,\mathbf{i}_3\right) = \\ &= \frac{1}{R+x^3}\left[R_o+\left(R+x^3\right)\cos x^2\right]\sin x^2 , \end{aligned} \tag{A.53e}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}^1_{12} &= \bar{\mathbf{g}}_{1,2}\cdot\bar{\mathbf{g}}^1 = \frac{\partial\bar{\mathbf{g}}_1}{\partial x^2}\cdot\bar{\mathbf{g}}^1 = \\ &= \left(R+x^3\right)\left(\sin x^2\sin x^1\,\mathbf{i}_1-\sin x^2\cos x^1\,\mathbf{i}_2\right)\cdot\frac{1}{R_o+(R+x^3)\cos x^2}\left\{-\sin x^1\,\mathbf{i}_1+\cos x^1\,\mathbf{i}_2\right\} = \\ &= -\frac{R+x^3}{R_o+(R+x^3)\cos x^2}\sin x^2 . \end{aligned} \tag{A.53f}$$

Az $x^3=0$ tóruszfelületen az (A.48) és (A.52) képletek alapján

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_1&=\mathbf{a}_1=\left(R_o+R\cos x^2\right)\left(-\sin x^1\,\mathbf{i}_1+\cos x^1\,\mathbf{i}_2\right)\\ \mathbf{g}_2&=\mathbf{a}_2=R\left(-\sin x^2\cos x^1\,\mathbf{i}_1-\sin x^2\sin x^1\,\mathbf{i}_2+\cos x^2\,\mathbf{i}_3\right)\\ \mathbf{g}_3&=\mathbf{a}_3=\cos x^2\cos x^1\,\mathbf{i}_1+\cos x^2\sin x^1\,\mathbf{i}_2+\sin x^2\,\mathbf{i}_3\end{aligned}\tag{A.54}$$

a három bázisvektor és

$$\begin{aligned}\mathbf{g}^1&=\mathbf{a}^1=\frac{1}{R_o+R\cos x^2}\left\{-\sin x^1\,\mathbf{i}_1+\cos x^1\,\mathbf{i}_2\right\}\\ \mathbf{g}^2&=\mathbf{a}^2=\frac{1}{R}\left(-\sin x^2\cos x^1\,\mathbf{i}_1-\sin x^2\sin x^1\,\mathbf{i}_2+\cos x^2\,\mathbf{i}_3\right)\\ \mathbf{g}^3&=\mathbf{a}^3=\mathbf{g}_3=\mathbf{a}_3\end{aligned}\tag{A.55}$$

a három reciprok bázisvektor. Ami a metrikus tenzorokat illeti, az (A.49) és (A.51) képletek alapján adódik, hogy

$$[g_{kl}]=[a_{kl}]=\begin{bmatrix}\left(R_o+R\cos x^2\right)^2 & 0 & 0\\ 0 & R^2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\qquad [g^{pq}]=[a^{pq}]=\begin{bmatrix}\frac{1}{\left(R_o+R\cos x^2\right)^2} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{R^2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.\tag{A.56}$$

A tóruszfelületen az (A.53) képletek alapján

(A.57)

$$\Gamma^3_{11}=-\left(R_o+R\cos x^2\right)\cos x^2\,,\quad \Gamma^3_{22}=-R\,,\qquad \Gamma^1_{31}=\frac{\cos x^2}{R_o+R\cos x^2}\,,$$
$$\Gamma^2_{32}=\frac{1}{R}\,,\qquad \Gamma^2_{11}=\left(R_o+R\cos x^2\right)\sin x^2\,,\quad \Gamma^1_{12}=-\frac{R}{R_o+R\cos x^2}\sin x^2$$

a nem azonosan zérus Christoffel szimbólumok értéke. Ezek birtokában az (A.57) képletek alapján azonnal adódnak a görbületi tenzorok mátrixai:

$$[b_{\alpha\beta}]=\left[\Gamma^3_{\alpha\beta}\right]=\begin{bmatrix}-\left(R_o+R\cos x^2\right)\cos x^2 & 0\\ 0 & -R\end{bmatrix}\tag{A.58a}$$

és

$$\left[b_\kappa^\lambda\right]=\left[g^{\lambda\nu}b_{\nu\kappa}\right]=\begin{bmatrix}\frac{1}{\left(R_o+R\cos x^2\right)^2} & 0\\ 0 & \frac{1}{R^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\left(R_o+R\cos x^2\right)\cos x^2 & 0\\ 0 & -R\end{bmatrix}=$$
$$=\begin{bmatrix}-\frac{\cos x^2}{R_o+R\cos x^2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{R}\end{bmatrix}.\tag{A.58b}$$

A fenti (A.58b) összefüggés felhasználásával számítható a $g_\alpha{}^\nu$ áthelyező tenzor mátrixa:

$$[g_\alpha{}^\nu]=\left[\delta_\alpha{}^\nu-x^3b_\alpha{}^\nu\right]=\begin{bmatrix}1+\frac{x^3\cos x^2}{R_o+R\cos x^2} & 0\\ 0 & 1+x^3/R\end{bmatrix},\tag{A.59a}$$

amivel

$$[g_\kappa{}^\nu]=\begin{bmatrix}\frac{1}{1+\frac{x^3\cos x^2}{R_o+R\cos x^2}} & 0\\ 0 & \frac{1}{1+x^3/R}\end{bmatrix}.\tag{A.59b}$$

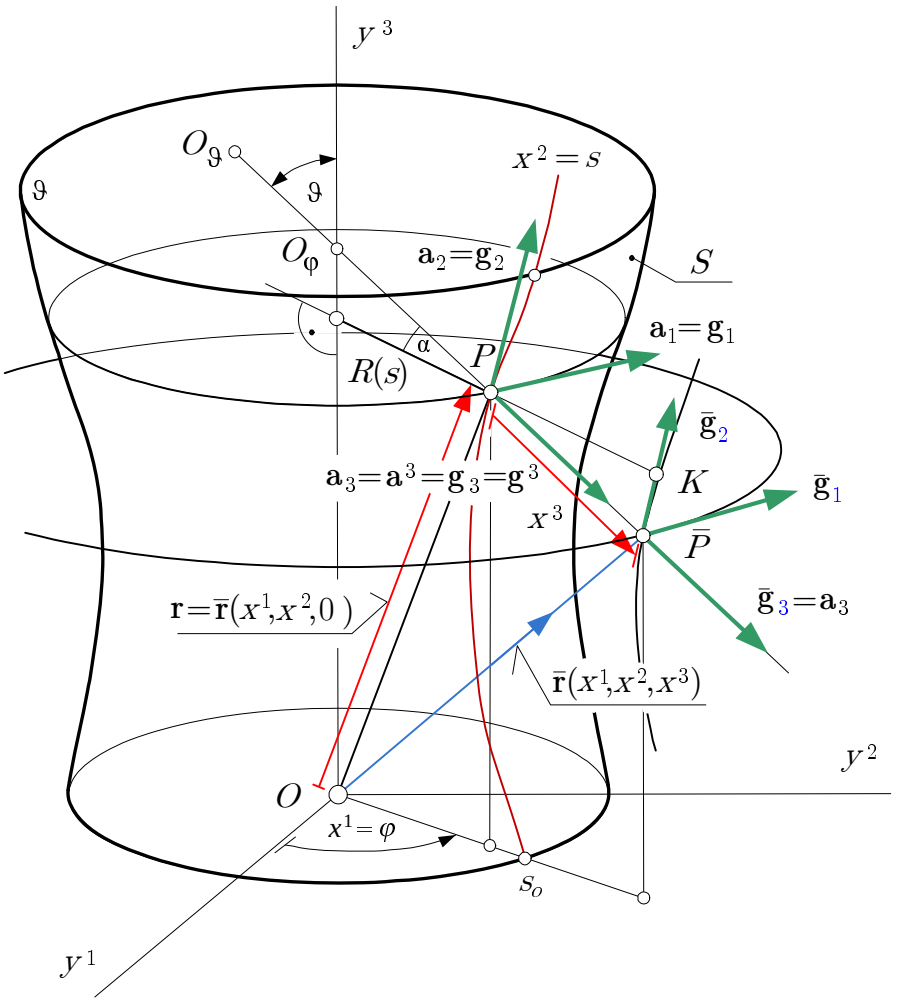
az inverz. Ha $R_o=0$ a jelen szakasz képleteiből visszakapjuk a gömbfelületre épített KR-el foglalkozó az A.2. szakasz valamennyi képletét.

A.5. Forgásfelületre épített koordinátarendszer

Az A.5. ábra az S forgásfelületre - ez héjak esetén a forgáshéj középfelülete lehet – épített görbevonalú KR-t szemléltet.

Legyen az $y^1 = R\left(y^3\right)$ az (y^1, y^2, y^3) KR (y^1, y^3) koordinátasíkjában fekvő síkgörbe – ezt az ábra nem tünteti fel –, amelyre nézve feltételezzük, hogy (a) $y^1 = R(y^3) \geq 0$ továbbá, hogy (b) az $R(y^3)$ függvény folytonosan differenciálható az y^3 koordináta szerint. A görbe mentén mért ívkoordinátát s jelöli. Feltevés szerint ha $y^3 = 0$, akkor $s = s_o = 0$. Megjegyezzük, hogy az $R(y^3)$ görbének meridiángörbe a neve.

Az S forgásfelületet úgy hozzuk létre, hogy megforgatjuk az $R(y^3)$ görbét az (y^1, y^2, y^3) KR y^3 tengelye körül. Eszerint az $R(y^3) = R(s)$ a forgásfelület sugara az y^3 helyen.



A.5. ábra.

Leolvasható az ábráról, hogy $x^1 = \varphi$, $x^2 = s$, az x^3 pedig a szokott módon a felület normálisa mentén mért előjeles távolság a felületen fekvő P és a normálison fekvő $\bar{P}$ pontok között. x^3 pozitív, ha a $\bar{P}$ pont felé haladva távolodunk az y^3 tengelytől, ellenkező esetben pedig negatív. A P ponthoz tartozó y^3 koordinátát az $y^3 = f(x^2)$ függvény adja meg.

Az y^3 koordináta tengelyt is tartalmazó síkok helyzetét az $x^1 = \varphi$ polárszög határozza meg. Megjegyezzük, hogy az A.5. ábra a φ polárszöghöz tartozó síkban szemlélteti az $R(y^3)$ meridiángörbét.

Nyilvánvaló, hogy $x^1 \in [-\pi, \pi]$ és $x^3 \in \left(-R(y^3)/\sin\vartheta, \infty\right]$. ($0 \leq \vartheta \leq \pi$ a forgásfelület P pontbeli normálisa és az y^3 tengely közötti szög.

Vezessük be a

$$\frac{\mathrm{d}R(y^3)}{\mathrm{d}y^3} = R'(y^3) = R' = \operatorname{tg}\alpha \tag{A.60}$$

jelölést – az α szög geometriai jelentése leolvasható az ábráról.

A forgásfelület P pontjának helyvektora az (y^1, y^2, y^3) kartéziuszi KR-ben – a vonatkozó egységvektorokat összhangban az eddigiekkel rendre $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$ és $\mathbf{i}_3$ jelöli – az

$$\begin{aligned}\mathbf{r} = \bar{\mathbf{r}}\left(x^1, x^2, 0\right) = y^1\mathbf{i}_1 + y^2\mathbf{i}_2 + y^3\mathbf{i}_3 = R(s)\cos\varphi\,\mathbf{i}_1 + R(s)\sin\varphi\,\mathbf{i}_2 + y^3\,\mathbf{i}_3 = \\ = R(x^2)\cos x^1\,\mathbf{i}_1 + R(x^2)\sin x^1\,\mathbf{i}_2 + f(x^2)\,\mathbf{i}_3\end{aligned} \tag{A.61}$$

módon írható fel. Nem nehéz ellenőrizni, hogy az x^2 koordinátavonalon

$$\mathrm{d}s = \mathrm{d}x^2 = \underbrace{\sqrt{1+(R')^2}}_{A_2(y^3)}\mathrm{d}y^3; \qquad A_2\left(y^3\right) \geq 1 \tag{A.62}$$

az ívelem, ahol az $A_2\left(y^3\right)$ függvényt a képlet megjelölt része értelmezi. Az $A_2\left(x^2\right)$ függvény ismeretében

$$x^2 = x^2(y^3) = x^2\big|_{y^3=0} + \int_{y^3=0}^{y^3} A_2\left(\eta^3\right)\,\mathrm{d}\eta^3\,; \qquad \eta^3 = y^3 \tag{A.63}$$

az x^2 ívkoordináta számításának képlete. Az (A.62) és (A.63) képletek szerint fennáll, hogy

$$\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}y^3} = A_2\left(y^3\right) \qquad \frac{\mathrm{d}y^3}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{A_2} \qquad \text{és} \qquad \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}y^3}\frac{\mathrm{d}y^3}{\mathrm{d}x^2} = \frac{R'}{A_2}\,. \tag{A.64}$$

A fentiek alapján a forgásfelületen

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_1 = \mathbf{a}_1 = &\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x^1} = R\left(-\sin x^1\,\mathbf{i}_1 + \cos x^1\,\mathbf{i}_2\right)\,, \\ \mathbf{g}_2 = \mathbf{a}_2 = &\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x^2} = \frac{1}{A_2}\left(R'\cos x^1\,\mathbf{i}_1 + R'\sin x^1\,\mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3\right)\end{aligned} \tag{A.65}$$

a két bázisvektor. A harmadik bázisvektor a

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2 = \frac{1}{A_2}\begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ -R\sin x^1 & R\cos x^1 & 0 \\ R'\cos x^1 & R'\sin x^1 & 1 \end{vmatrix} = \\ = \frac{1}{A_2}\left(R\cos x^1\,\mathbf{i}_1 + R\sin x^1\,\mathbf{i}_2 - RR'\,\mathbf{i}_3\right)\end{aligned}$$

vektorszorzat

$$|\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2| = \frac{1}{A_2}\sqrt{R^2\left(\cos^2 x^1 + \sin^2 x^1\right) + \left(RR'\right)^2} = \frac{1}{A_2}R\sqrt{1+\left(R'\right)^2} = R$$

abszolut értékének felhasználásával – fentebb kihasználtuk az A_2 (A.62) alatti értelmezését – számítható

$$\mathbf{g}_3 = \mathbf{a}_3 = \frac{\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2}{|\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2|} = \frac{1}{A_2}\left(\cos x^1\,\mathbf{i}_1 + \sin x^1\,\mathbf{i}_2 - R'\,\mathbf{i}_3\right) \tag{A.66}$$

A bázisvektorok birtokában írható, hogy

$$\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 = R^2\,, \qquad \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2 = \frac{\left(R'\right)^2 + 1}{A_2^2} = 1\,, \qquad \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_3 = 1\,,$$

tehát

$$[g_{k\ell}] = [a_{k\ell}] = [\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_\ell] = \begin{bmatrix} R^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad g_\circ = R^2 \tag{A.67}$$

az alsóindexes metrikus tenzor mátrixa, illetve determinánsa. A felsőindexes metrikus tenzor mátrixa az alsóindexes metrikus tenzor mátrixának inverze:

$$[g^{pq}] = [a^{pq}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{R^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \tag{A.68}$$

A felsőindexes bázisvektorok indexemeléssel számíthatók:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^1 &= g^{1\ell}\mathbf{g}_\ell = g^{11}\mathbf{g}_1 = \frac{1}{R}\left(-\sin x^1\,\mathbf{i}_1 + \cos x^1\,\mathbf{i}_2\right) , \\ \mathbf{g}^2 &= g^{2\ell}\mathbf{g}_\ell = g^{22}\mathbf{g}_2 = \mathbf{g}_2 = \frac{1}{A_2}\left(R'\cos x^1\,\mathbf{i}_1 + R'\sin x^1\,\mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3\right) , \\ \mathbf{g}^3 &= \mathbf{a}^3 = \mathbf{g}_3 = \mathbf{a}_3 = \frac{1}{A_2}\left(\cos x^1\,\mathbf{i}_1 + \sin x^1\,\mathbf{i}_2 - R'\,\mathbf{i}_3\right) . \end{aligned} \tag{A.69}$$

A későbbiek kedvéért összefoglalás-szerűen megadjuk az alábbi deriváltakat:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^2}R' = \frac{\mathrm{d}R'}{\mathrm{d}y^3}\frac{\mathrm{d}y^3}{\mathrm{d}x^2} = \frac{R''}{A_2} , \qquad \frac{\mathrm{d}\ A_2}{\mathrm{d}y^3} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y^3}\sqrt{1+(R')^2} = \frac{1}{\sqrt{1+(R')^2}}R'R'' = \frac{R'R''}{A_2} \tag{A.70a}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^2}\frac{1}{A_2} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y^3}\frac{1}{A_2}\right)\frac{\mathrm{d}y^3}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{1}{A_2^3}\frac{\mathrm{d}\ A_2}{\mathrm{d}y^3} = -\frac{R'R''}{A_2^4} \tag{A.70b}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^2}\frac{R'}{A_2} &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y^3}\frac{R'}{\sqrt{1+(R')^2}}\right)\underbrace{\frac{\mathrm{d}y^3}{\mathrm{d}x^2}}_{1/A_2} = \frac{1}{A_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y^3}\frac{R'}{\sqrt{1+(R')^2}} = \\ &= \frac{1}{A_2}\frac{R''}{(A_2)} - \frac{1}{A_2}\frac{(R')^2 R''}{\left(1+(R')^2\right)^{3/2}} = \frac{R''}{(A_2)^2}\left(1-\left(\frac{R'}{A_2}\right)^2\right) = \frac{R''}{(A_2)^4} \end{aligned} \tag{A.70c}$$

A forgásfelület normálisán fekvő $\bar{P}$ pontnak

$$\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{r} + x^3\mathbf{g}_3 \tag{A.71}$$

a helyvektora. Következésképp – kihasználva az (A.70) alatti deriváltakat mindenütt, ahol szükséges – kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{g}}_1 = \frac{\partial\bar{\mathbf{r}}}{\partial x^1} &= \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x^1} + x^3\frac{\partial\mathbf{g}_3}{\partial x^1} = \\ &= \mathbf{g}_1 + \frac{x^3}{A_2 R}\underbrace{R\left(-\sin x^1\,\mathbf{i}_1 + \cos x^1\,\mathbf{i}_2\right)}_{\mathbf{g}_1} = \left(1+\frac{x^3}{A_2 R}\right)\mathbf{g}_1 = \\ &= \left(1+\frac{x^3}{A_2 R}\right)R\left(-\sin x^1\,\mathbf{i}_1 + x^2\cos x^1\,\mathbf{i}_2\right) . \end{aligned} \tag{A.72a}$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{g}}_2 = \frac{\partial\bar{\mathbf{r}}}{\partial x^2} &= \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x^2} + x^3\frac{\partial\mathbf{g}_3}{\partial x^2}\,\mathbf{i}_3 = \mathbf{g}_2 - x^3\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^2}\frac{R'}{A_2}}_{\text{(A.70c) alapján}}\mathbf{i}_3 = \mathbf{g}_2 - x^3\frac{R''}{(A_2)^4}\mathbf{i}_3 = \\ &= \frac{1}{A_2}\left\{R'\cos x^1\,\mathbf{i}_1 + R'\sin x^1\,\mathbf{i}_2 + \left(1 - x^3\frac{R''}{(A_2)^4}\right)\,\mathbf{i}_3\right\} , \end{aligned} \tag{A.72b}$$

$$\bar{\mathbf{g}}_3 = \frac{\partial\bar{\mathbf{r}}}{\partial x^3} = \mathbf{g}^3 = \mathbf{a}^3 = \mathbf{g}_3 = \mathbf{a}_3 = \frac{1}{A_2}\left(\cos x^1\,\mathbf{i}_1 + \sin x^1\,\mathbf{i}_2 - R'\,\mathbf{i}_3\right) \tag{A.72c}$$

a három alsóindexes bázisvektor,

$$[\bar{g}_{k\ell}] = [\bar{\mathbf{g}}_k \cdot \bar{\mathbf{g}}_\ell] = \begin{bmatrix} R^2\left(1+\frac{x^3}{A_2 R}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_2^2}\left[(R')^2+\left(1-x^3\frac{R''}{(A_2)^4}\right)^2\right] & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{A.73}$$

a kovariáns metrikus tenzor mátrixa, amelynek

$$[\bar{g}^{pq}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{R^2\left(1+\frac{x^3}{A_2 R}\right)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{A_2^2}{(R')^2+\left(1-x^3\frac{R''}{(A_2)^4}\right)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{A.74}$$

az inverze. Ez egyben a kontravariáns mértéktenzor mátrixa. Az utóbbi és az (A.71) képleteket felhasználva adódnak a kontravariáns bázisvektorok:

(A.75a)

$$\bar{\mathbf{g}}^1 = \bar{g}^{11}\bar{\mathbf{g}}_1 = \frac{1}{R\left(1+\frac{x^3}{A_2 R}\right)}\left(-\sin x^1\,\mathbf{i}_1+\cos x^1\,\mathbf{i}_2\right),$$

(A.75b)

$$\bar{\mathbf{g}}^2 = \bar{g}^{22}\bar{\mathbf{g}}_2 = \bar{\mathbf{g}}_2 = \frac{A_2}{(R')^2+\left(1-x^3\frac{R''}{(A_2)^4}\right)^2}\left\{R'\cos x^1\,\mathbf{i}_1+R'\sin x^1\,\mathbf{i}_2+\left(1-x^3\frac{R''}{(A_2)^4}\right)\mathbf{i}_3\right\},$$

(A.75c)

$$\bar{\mathbf{g}}^3 = \mathbf{g}^3 = \mathbf{a}^3 = \mathbf{g}_3 = \mathbf{a}_3 = \frac{1}{A_2}\left(\cos x^1\,\mathbf{i}_1+\sin x^1\,\mathbf{i}_2-R'\,\mathbf{i}_3\right).$$

Az alábbiakban az S felületen vett nem azonosan zérus Christoffel szimbólumok számítását tekintjük át:

(A.76a)
$$\Gamma^1_{31} = \mathbf{g}_{3,1}\cdot\mathbf{g}^1 = \frac{\partial \mathbf{g}_3}{\partial x^1}\cdot\mathbf{g}^1 =$$
$$= \left\{\frac{\partial}{\partial x^1}\frac{1}{A_2}\left(\cos x^1\,\mathbf{i}_1+\sin x^1\,\mathbf{i}_2-R'\,\mathbf{i}_3\right)\right\}\cdot\frac{1}{R}\left(-\sin x^1\,\mathbf{i}_1+\cos x^1\,\mathbf{i}_2\right) =$$
$$= \frac{1}{A_2}\left(-\sin x^1\,\mathbf{i}_1+\cos x^1\,\mathbf{i}_2\right)\cdot\frac{1}{R}\left(-\sin x^1\,\mathbf{i}_1+\cos x^1\,\mathbf{i}_2\right) = \frac{1}{RA_2}$$

(A.76b)
$$\Gamma^1_{21} = \mathbf{g}_{2,1}\cdot\mathbf{g}^1 = \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial x^1}\cdot\mathbf{g}^1 =$$
$$= \left\{\frac{\partial}{\partial x^1}\frac{1}{A_2}\left(R'\cos x^1\,\mathbf{i}_1+R'\sin x^1\,\mathbf{i}_2+\mathbf{i}_3\right)\right\}\cdot\frac{1}{R}\left(-\sin x^1\,\mathbf{i}_1+\cos x^1\,\mathbf{i}_2\right) =$$
$$= \frac{R'}{A_2}\left(-\sin x^1\,\mathbf{i}_1+\cos x^1\,\mathbf{i}_2\right)\cdot\frac{1}{R}\left(-\sin x^1\,\mathbf{i}_1+\cos x^1\,\mathbf{i}_2\right) = \frac{R'}{RA_2}$$

(A.76c)
$$\Gamma^2_{11} = \mathbf{g}_{1,1}\cdot\mathbf{g}^2 = \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial x^1}\cdot\mathbf{g}^2 =$$
$$= \left\{\frac{\partial}{\partial x^1}R\left(-\sin x^1\,\mathbf{i}_1+\cos x^1\,\mathbf{i}_2\right)\right\}\cdot\frac{1}{A_2}\left(R'\cos x^1\,\mathbf{i}_1+R'\sin x^1\,\mathbf{i}_2+\mathbf{i}_3\right) =$$
$$= R\left(-\cos x^1\,\mathbf{i}_1-\sin x^1\,\mathbf{i}_2\right)\cdot\frac{1}{A_2}\left(R'\cos x^1\,\mathbf{i}_1+R'\sin x^1\,\mathbf{i}_2+\mathbf{i}_3\right) = -\frac{RR'}{A_2}$$

(A.76d) $\Gamma^2_{32} = \mathbf{g}_{3,2}\cdot\mathbf{g}^2 = \dfrac{\partial \mathbf{g}_3}{\partial x^2}\cdot\mathbf{g}^2 =$

$$= \left\{\frac{\partial}{\partial x^2}\frac{1}{A_2}\left(\cos x^1\,\mathbf{i}_1+\sin x^1\,\mathbf{i}_2-R'\,\mathbf{i}_3\right)\right\}\cdot\frac{1}{A_2}\left(R'\cos x^1\,\mathbf{i}_1+R'\sin x^1\,\mathbf{i}_2+\mathbf{i}_3\right)=$$

$$=\left\{\underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^2}\frac{1}{A_2}\right)}_{-R'R''/A_2^4}\left(\cos x^1\,\mathbf{i}_1+\sin x^1\,\mathbf{i}_2-R'\,\mathbf{i}_3\right)-\frac{1}{A_2}\underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^2}R'\right)}_{R''/A_2}\mathbf{i}_3\right\}\cdot\frac{1}{A_2}\left(R'\cos x^1\,\mathbf{i}_1+R'\sin x^1\,\mathbf{i}_2+\mathbf{i}_3\right)=$$

$$=\left\{-\frac{R'R''}{A_2^4}\left(\cos x^1\,\mathbf{i}_1+\sin x^1\,\mathbf{i}_2\right)-\frac{R''}{(A_2)^2}\left[1-\left(\frac{R'}{A_2}\right)^2\right]\mathbf{i}_3\right\}\cdot\frac{1}{A_2}\left(R'\cos x^1\,\mathbf{i}_1+R'\sin x^1\,\mathbf{i}_2+\mathbf{i}_3\right)=$$

$$=-\frac{(R')^2R''}{A_2^5}-\frac{R''}{(A_2)^3}\left[1-\left(\frac{R'}{A_2}\right)^2\right]=-\frac{R''}{(A_2)^3}\left(\left(\frac{R'}{A_2}\right)^2+1-\left(\frac{R'}{A_2}\right)^2\right)=-\frac{R''}{(A_2)^3}$$

(A.76e) $\Gamma^3_{11} = \mathbf{g}_{1,1}\cdot\mathbf{g}^3 = \dfrac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial x^1}\cdot\mathbf{g}^3 = \left\{\dfrac{\partial}{\partial x^1}R\left(-\sin x^1\,\mathbf{i}_1+\cos x^1\,\mathbf{i}_2\right)\right\}\cdot\mathbf{g}^2 =$

$$= R\left(-\cos x^1\,\mathbf{i}_1-\sin x^1\,\mathbf{i}_2\right)\cdot\frac{1}{A_2}\left(\cos x^1\,\mathbf{i}_1+\sin x^1\,\mathbf{i}_2-R'\,\mathbf{i}_3\right)=-\frac{R}{A_2}$$

(A.76f) $\Gamma^3_{22} = \mathbf{g}_{2,2}\cdot\mathbf{g}^3 = \dfrac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial x^2}\cdot\mathbf{g}^3 = \left\{\dfrac{\partial}{\partial x^2}\dfrac{1}{A_2}\left(R'\cos x^1\,\mathbf{i}_1+R'\sin x^1\,\mathbf{i}_2+\mathbf{i}_3\right)\right\}\cdot\mathbf{g}^3 =$

$$=\left\{\underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^2}\frac{1}{A_2}\right)}_{-R'R''/A_2^4}\left(R'\cos x^1\,\mathbf{i}_1+R'\sin x^1\,\mathbf{i}_2+\mathbf{i}_3\right)+\frac{1}{A_2}\underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^2}R'\right)}_{R''/A_2}\left(\cos x^1\,\mathbf{i}_1+\sin x^1\,\mathbf{i}_2\right)\right\}\cdot\mathbf{g}^3=$$

$$=\left\{\frac{R''}{(A_2)^2}\left[1-\left(\frac{R'}{A_2}\right)^2\right]\left(\cos x^1\,\mathbf{i}_1+\sin x^1\,\mathbf{i}_2\right)-\frac{R'R''}{A_2^4}\mathbf{i}_3\right\}\cdot\frac{1}{A_2}\left(\cos x^1\,\mathbf{i}_1+\sin x^1\,\mathbf{i}_2-R'\,\mathbf{i}_3\right)=$$

$$=\left\{\frac{R''}{(A_2)^3}\left[1-\left(\frac{R'}{A_2}\right)^2\right]+\frac{R''}{(A_2)^3}\left(\frac{R'}{A_2}\right)^2\right\}=\frac{R''}{A_2^3}$$

A forgásfelületen a görbületi tenzorok mátrixai tekintetében a

(A.77a) $$[b_{\alpha\beta}] = \Gamma^3_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{A_2} & 0 \\ 0 & \frac{R''}{A_2^3} \end{bmatrix}$$

és a

(A.77b) $$\left[b^\lambda_\kappa\right] = \left[g^{\lambda\nu}b_{\nu\kappa}\right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{R^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{R}{A_2} & 0 \\ 0 & \frac{R''}{A_2^3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RA_2} & 0 \\ 0 & \frac{R''}{A_2^3} \end{bmatrix}$$

összefüggéseket kapjuk. A bázisvektorok P pontból a $\bar{P}$ pontba történő áthelyezésének tenzora az (A.77b) képlet felhasználásával számítható:

(A.78a) $$[g_\alpha{}^\nu] = \left[\delta_\alpha{}^\nu - x^3 b_\alpha{}^\nu\right] = \begin{bmatrix} 1+\frac{1}{RA_2}x^3 & 0 \\ 0 & 1-\frac{R''}{A_2^3}x^3 \end{bmatrix}.$$

Ennek

(A.78b) $$[g_\kappa{}^\nu] = \begin{bmatrix} \frac{RA_2}{RA_2+x^3} & 0 \\ 0 & \frac{A_2^3}{A_2^3-R''x^3} \end{bmatrix}$$

az inverze.

Nyilvánvaló a a (9.85) és az (A.78b) képletek egybevetése alapján, hogy a P pontban a $\mathbf{g}^1, \mathbf{g}^3$ és $\mathbf{g}^2, \mathbf{g}^3$ bázisvektorok által kifeszített sík görbületi fősík, az első fősíkban pedig

$$b_1^1 = -\frac{1}{R_{(1)}} = -\frac{1}{RA_2} \quad \text{azaz} \quad R_{(1)} = RA_2 = R\sqrt{1+(R')^2} = \frac{R}{\cos\alpha} \tag{A.79a}$$

a főgörbület sugara, a második fősíkban pedig ugyanilyen módon adódik, hogy

$$b_2^2 = -\frac{1}{R_{(2)}} = \frac{R''}{A_2^3} \quad \text{azaz} \quad R_{(2)} = -\frac{A_2^3}{R''}\,. \tag{A.79b}$$

Az első esetben O_φ, a másodikban pedig O_ϑ jelöli a görbületi középpontot az ábrán.

B. FÜGGELÉK

A gyakorlatok megoldásai

B.1. 1. Fejezet

1. Gyakorlat: Lineárisan függetlenek az azonos ponthoz kötöttnek tekintett (közös alkalmazási pontú) $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ vektorok, ha zérustól különböző a vegyesszorzatuk. Nem nehéz ellenőrizni, hogy a gyakorlat egyik vektorhármasa sem lineárisan független, mivel

$$[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3] = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 10 & 2 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{és} \quad [\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3] = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 6 & 7 & 5 \\ 9 & 10 & 8 \end{vmatrix} = 0\,.$$

2. Gyakorlat: Ha bázist alkotnak a $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$ és $\mathbf{g}_3$ vektorok, akkor zérustól különböző a vegyesszorzatuk:

$$\gamma_\circ = [\mathbf{g}_1\mathbf{g}_2\mathbf{g}_3] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -1\,.$$

A

$$\mathbf{g}^1 = \frac{\mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3}{\gamma_\circ} = -\begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_3\,,$$

$$\mathbf{g}^2 = \frac{\mathbf{g}_3 \times \mathbf{g}_1}{\gamma_\circ} = -\begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}_1 - 2\mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3\,,$$

$$\mathbf{g}^3 = \frac{\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2}{\gamma_\circ} = -\begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2$$

reciprok vektorokkal

$$a^1 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{g}^1 = (6\mathbf{i}_1 + 9\mathbf{i}_2 + 14\mathbf{i}_3)\cdot(\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_3) = 6 + 9 - 14 = 1\,,$$
$$a^2 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{g}^2 = (6\mathbf{i}_1 + 9\mathbf{i}_2 + 14\mathbf{i}_3)\cdot(\mathbf{i}_1 - 2\mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3) = 6 - 18 + 14 = 2\,,$$
$$a^3 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{g}^3 = (6\mathbf{i}_1 + 9\mathbf{i}_2 + 14\mathbf{i}_3)\cdot(-\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2) = -6 + 9 = 3$$

a keresett három koordináta, azaz

$$\mathbf{a} = a^1\mathbf{g}_1 + a^2\mathbf{g}_2 + a^3\mathbf{g}_3 = \mathbf{g}_1 + 2\mathbf{g}_2 + 3\mathbf{g}_3\,.$$

3. Gyakorlat: Ha lineárisan összefügg a $\mathbf{b}_1$ és $\mathbf{b}_2$ a háromméretű térben, akkor fennáll az

$$\lambda\mathbf{a}_1 + 4\mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_3 = \kappa\,(\mathbf{a}_1 + \lambda\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3)\ .$$

egyenlet, amelyben a λ és κ ismeretlen. Szorozzuk át ezt az egyenletet skalárisan az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ vektorokhoz tartozó $\mathbf{a}_1^*$, $\mathbf{a}_2^*$ és $\mathbf{a}_3^*$ reciprok vektorokkal – mivel bázist alkotnak az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ vektorok, létezik az $\mathbf{a}_1^*$, $\mathbf{a}_2^*$ és $\mathbf{a}_3^*$ reciprok vektorhármas –, és használjuk ki, hogy

$$\mathbf{a}_i\cdot\mathbf{a}_j^* = \begin{cases} 1 & i = j\,, \\ 0 & i \neq j\,. \end{cases}$$

Három skaláregyenletet kapunk:

$$\lambda - \kappa = 0\,, \quad 4 - \lambda\kappa = 0 \quad \text{és} \quad 2 + \kappa = 0\,.$$

A harmadik egyenletből $\kappa = -2$, ezzel az első egyenletből $\lambda = -2$. A kapott megoldáspár teljesíti a második egyenletet is.

4. Gyakorlat: Bázist alkotnak a $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$ és $\mathbf{g}_3$ bázishoz tartozó és az (1.18) képletekkel értelmezett $\mathbf{g}^1$, $\mathbf{g}^2$ és $\mathbf{g}^3$ reciprok vektorok a háromméretű térben, ha a

$$c_1\mathbf{g}^1 + c_2\mathbf{g}^2 + c_3\mathbf{g}^3 = 0$$

egyenletnek csak triviális megoldása van a c_1, c_2 és c_3 állandókra nézve. Átszorozva a fenti egyenletet $\mathbf{g}_k$-val, és kihasználva a $\mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}^l = \delta_k^l$ összefüggést azonnal kapjuk, hogy $c_k = 0$. Ez egyben az állítás igazolása.

5. Gyakorlat: Vegyük észre, hogy $J_{y,x}$ a λ_1, λ_2 és λ_3-at adó

$$\lambda_1\mathbf{g}_1 + \lambda_2\mathbf{g}_2 + \lambda_2\mathbf{g}_3 = 0$$

homogén lineáris egyenletrendszer determinánsa – lásd az (1.39) összefüggést tartalmazó bekezdést. Mivel ez nem zérus csak triviális megoldás van a λ_1, λ_2 és λ_3 skalárokra.

B.2. 2. Fejezet

1. Gyakorlat:

i. $a_k^k = a_1^1 + a_2^2 + a_3^3$;
ii. $a_{mn}b^n = a_{m1}b^1 + a_{m2}b^2 + a_{m3}b^3$;
iii. $c^m a_{mn} = c^1 a_{1n} + c^2 a_{2n} + c^3 a_{3n}$;
iv. $c^m a_{mm}$ – ez a kifejezés hibás;
v. $a_{kk}b^{pq} = (a_{11} + a_{22} + a_{33})\, b^{pq}$;
vi. $a_{kr}b^{kr} = a_{11}b^{11} + a_{12}b^{12} + a_{13}b^{13} + a_{21}b^{21} + a_{22}b^{22} + \ldots + a_{32}b^{32} + a_{33}b^{33}$;
vii. $a^r{}_m c^{mn} = a^r{}_1 c^{1n} + a^r{}_2 c^{2n} + a^r{}_3 c^{3n}$;
viii. $e^{ijk}a_{jk} = e^{123}\,(a_{23} - a_{32}) + e^{231}\,(a_{31} - a_{13}) + e^{312}\,(a_{12} - a_{21}) =$
$= (a_{23} - a_{32}) + (a_{31} - a_{13}) + (a_{12} - a_{21})$.

2. Gyakorlat:

i.-ii. Tekintettel arra, hogy a néma indexek átnevezhetők a második kifejezés esetén fennáll a $d_r\, a_s{}^r = a_s{}^n\, d_n$ összefüggés. A kifejezés jobboldala csak a szabad indexben tér el az első kifejezéstől. Mivel a szabad index tetszőleges lehet a két kifejezés ugyanazt a mennyiséget adja eredményül.

iii.-iv. Mivel a néma indexek átnevezhetők a *iv.* alatti kifejezés tekintetében fennáll, hogy $a_{rs}c^{sr} = a_{mn}c^{mn}$. Ez azt jelenti, hogy a *iv.* alatti kifejezés, valamint a *iii.* alatti kifejezés értéke egyaránt ugyanaz a skalár.

3. Gyakorlat:

Az összegek alkalmas kiírása igazolja az állítást:

$$a_{kl}b^k b^l = \underbrace{a_{11}}_{=0} b^1 b^1 + \underbrace{a_{22}}_{=0} b^2 b^2 + \underbrace{a_{33}}_{=0} b^3 b^3 + \\ + \underbrace{(a_{12} + a_{21})}_{=0} b^1 b^2 + \underbrace{(a_{23} + a_{23})}_{=0} b^2 b^3 + \underbrace{(a_{31} + a_{13})}_{=0} b^3 b^1 = 0\,.$$

4. Gyakorlat:

Jelölje $\mathbf{d}$ a $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ szorzatot:

$$\mathbf{d} = d_p\mathbf{g}^p = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \varepsilon_{pqr} b^q c^r \mathbf{g}^p\,.$$

Felhasználva a fenti képlet jobboldalát, valamint az (1.29) összefüggést, írható, hogy

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{d} = \varepsilon^{nsp} a_s d_p \mathbf{g}_n = \varepsilon^{nsp}\varepsilon_{pqr} a_s b^q c^r \mathbf{g}_n = \\ = \delta^{ns}_{qr} a_s b^q c^r \mathbf{g}_n = \left(\delta^n_q \delta^s_r - \delta^n_r \delta^s_q\right) a_s b^q c^r \mathbf{g}_n = \left(a_r c^r b^n - a_s b^s c^n\right) \mathbf{g}_n\,.$$

Ha ezt az eredményt megszorozzuk skalárisan $\mathbf{g}_k$-val és átnevezzük az s néma indexeket r-re, akkor az igazolni kívánt eredményt kapjuk:

$$[\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]\cdot\mathbf{g}_k=(a_rc^rb^n-a_sb^sc^n)\,g_{nk}=a_rc^rb_k-a_rb^rc_k\,.$$

Szimbolikus írásmódban:

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{c}\,.$$

Ez az eredmény az (1.3a) alatti kifejtési tétel igazolása.

A 4. Gyakorlat második egyenletének helyessége – a kifejtési tétel (1.3b) alatti alakja – hasonló módon igazolható.

5. Gyakorlat:

A vektoriális szorzások, majd pedig a skaláris szorzás végrehajtása után használjuk ki az (1.29) összefüggést, illetve a Kronecker-delta indexátnevezési funkcióját. Kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})&=a_rb_k\varepsilon^{rks}c^md^n\varepsilon_{mns}=a_rb_kc^md^n\varepsilon^{rks}\varepsilon_{mns}=\\&=a_rb_kc^md^n\left(\delta^r_m\delta^k_n-\delta^r_n\delta^k_m\right)=a_rc^rb_kd^k-a_rd^rb_kc^k\,.\end{aligned}$$

Ugyanez az eredmény a vegyes szorzat átalakításával szimbolikus írásmódban is megkapható, ha kihasználjuk az (1.3b) alatti kifejtési tételt is:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=[(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}]\cdot\mathbf{d}=\;=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\;(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\;(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})\;.$$

6. Gyakorlat: Az

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\varepsilon_{pqr}a^qb^r\mathbf{g}^p\,,\qquad\mathbf{c}\times\mathbf{d}=\varepsilon_{uvw}c^vd^w\mathbf{g}^u$$

és

$$\mathbf{g}^p\times\mathbf{g}^u=\varepsilon^{pus}\mathbf{g}_s$$

szorzatok, továbbá az (1.29) összefüggés, illetve a Kronecker-delta indexátnevezési funkciójának felhasználásával adódik, hogy

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})&=\underbrace{\varepsilon_{pqr}\varepsilon^{pus}}_{\delta^u_q\delta^s_r-\delta^u_r\delta^s_q}a^qb^r\;\varepsilon_{uvw}c^vd^w\mathbf{g}_s=\\&=\varepsilon_{uvw}a^uc^vd^w\;b^s\mathbf{g}_s-\varepsilon_{rvw}b^rc^vd^w\;b^s\mathbf{g}_s=\\&=[\mathbf{acd}]\,\mathbf{b}-[\mathbf{bcd}]\,\mathbf{a}\,.\end{aligned}$$

Ezt kellett igazolni.

7. Gyakorlat: Az (1.3b) kifejtési tétel szerint

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{c}$$

és

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{b}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{a}\,.$$

Mivel a gyakorlat egyik feltétele előírja, hogy

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$$

következik, hogy

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{c}=(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{a}$$

ahonnan

$$\mathbf{c}=\frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}\mathbf{a}\qquad\text{és}\qquad\mathbf{a}=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}}\mathbf{c}\,.$$

Eszerint kollineáris az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{c}$ ha teljesül a gyakorlat másik két feltétele is, azaz ha $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\neq0$ és $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\neq0$.

8. Gyakorlat: Nem nehéz ellenőrizni az (1.3a) kifejtési tétel értelemszerű felhasználásával, hogy valóban fennáll a Jacobi-féle azonosság:

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+\mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a})+\mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=$$
$$=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{c}+(\mathbf{b}\cdot\mathbf{a})\,\mathbf{c}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{a}+(\mathbf{c}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{a}-(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})\,\mathbf{b}=\mathbf{0}\,.$$

B.3. 3. Fejezet

1. Gyakorlat: Jelölje $\mathcal{G}^{pr}$ a g_{pr} adjungáltját. Nyilvánvaló a $(3.10)_1$ képlet alapján – az a betűk helyére megfelelő betűnagyságban g-t, $|a_{sj}|$ helyére $g_\circ$-át kell gondolni –, hogy

$$g_\circ = g_{pr}\mathcal{G}^{pr}\,. \tag{B.1}$$

Következésképp

$$\frac{\partial g_\circ}{\partial g_{Pq}} = g_{pr}\underbrace{\frac{\partial \mathcal{G}^{pr}}{\partial g_{Pq}}}_{=0} + \mathcal{G}^{pr}\underbrace{\frac{\partial g_{pr}}{\partial g_{Pq}}}_{=\delta^q_r} \tag{B.2}$$

ahol a P rögzítettnek tekintett index. A képlet jobboldalán megadott értékek magyarázatát az alábbiakban ismertetjük.

(a) A jobboldalon álló utolsó deriváltnak csak $p=P$-re különbözhet az értéke a zérustól. Ennek alapján nyilvánvaló a

$$\frac{\partial g_{pr}}{\partial g_{Pq}} = \delta^q_r$$

összefüggés helyessége.

(b) Ha azt is figyelembe vesszük továbbá, hogy az $\mathcal{G}^{pr}$ adjungált $p=P$ esetén nem tartalmazza g_{Pq}-t akkor azonnal következik, hogy

$$\frac{\partial \mathcal{G}^{pr}}{\partial g_{Pq}} = 0$$

Fentiek alapján átírható a (B.2) összefüggés:

$$\frac{\partial g_\circ}{\partial g_{pq}} = \mathcal{G}^{pr}\delta^q_r = \mathcal{G}^{pq}\,. \tag{B.3}$$

Ha még a

$$\mathcal{G}^{pq} = g_\circ g^{pq}$$

összefüggést is felhasználjuk – ez az adjungált és az eredeti tenzor közötti kapcsolat, melynek felírása során kihasználtuk azt a körülményt is, hogy szimmetrikus a metrikus tenzor –, akkor azonnal megkapjuk a (B.3)-ból az igazolni kívánt

$$\frac{\partial g_\circ}{\partial g_{pq}} = g_\circ g^{pq} \tag{B.4}$$

egyenletet.

2. Gyakorlat: Az igazolni kívánt képlet azonnal adódik az 1. Gyakorlat eredményének, azaz a (B.4) összefüggésnek felhasználásával:

$$\frac{\partial \ln g_\circ}{\partial g_{pq}} = \frac{1}{g_\circ}\frac{\partial g_\circ}{\partial g_{pq}} = \frac{1}{g_\circ}g_\circ g^{pq} = g^{pq}\,.$$

B.4. 4. Fejezet

1. Gyakorlat: Legyen $\mathbf{v} = v_\ell \mathbf{g}^\ell = v^r \mathbf{g}_r$ tetszőleges vektor. A gyakorlat állításainak helyessége azonnal következik a

$$\delta^k_\ell \, \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}^\ell \cdot \underbrace{(v^r \mathbf{g}_r)}_{\mathbf{v}} = \mathbf{g}_\ell \underbrace{\mathbf{g}^\ell \cdot \mathbf{g}_r}_{\delta^\ell_r} v^r = v^\ell \mathbf{g}_\ell = \mathbf{v}$$

és

$$g^{k\ell} \, \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_\ell \cdot \underbrace{(v^r \mathbf{g}_r)}_{\mathbf{v}} = g^{k\ell} \, \mathbf{g}_k \underbrace{\mathbf{g}_\ell \cdot \mathbf{g}_r}_{g_{\ell r}} v^r = \underbrace{g^{k\ell} g_{\ell r}}_{\delta^k_r} \mathbf{g}_k v^r = v^r \mathbf{g}_r = \mathbf{v}$$

átalakításokból.

2. Gyakorlat: Az állítás igazolása a (4.32) képlet alkalmas átalakítását igényli:

$$'d_{k\,l} = t_k{}^p \, a_{pr} \, \delta^r_q \, b^q{}_s t_\ell{}^s = t_k{}^p \, a_{pr} \underbrace{t_v{}^r \tau_q{}^v}_{\delta^r_q} b^q{}_s t_l{}^s =$$

$$= \underbrace{t_k{}^p \, a_{pr} \, t_v{}^r}_{'a_{k\,v}} \underbrace{\tau_q{}^v \, b^q{}_s t_\ell{}^s}_{'b^v{}_\ell} = {}'a_{k\,v} \, {}'b^v{}_\ell \, .$$

Ezt kellett igazolni.

B.5. 5. Fejezet

1. Gyakorlat: Ahhoz, hogy az a^p és b_q sokaságok ugyanazt a vektort jelentsék az (x) görbevonalú KR-ben a

$$a^p \mathbf{g}_p = b_q \mathbf{g}^q = b_q g^{qp} \mathbf{g}_p \, ,$$

vagy ami ezzel egyenértékű a

$$b_q \mathbf{g}^q = a^p \mathbf{g}_p = a^p g_{pq} \mathbf{g}^q$$

összefüggésnek kell fennállnia. Ha az első egyenletet $\mathbf{g}^r$-el, a másodikat pedig $\mathbf{g}_s$-el skalárisan átszorozzuk, akkor kihasználva a jól ismert $\mathbf{g}_p \cdot \mathbf{g}^r = \delta^r_p$ és $\mathbf{g}^q \cdot \mathbf{g}_s = \delta^q_s$ összefüggéseket és indexátnevező operátorként működtetve a Kronecker-deltát kapjuk, hogy

$$a^r = b_q g^{qr} \quad \text{és} \quad b_s = a^p g_{ps} \, .$$

Ez az eredmény az indexemelés, illetve süllyesztés szabálya – ez a szabály kapcsolja tehát össze a a^p és b_q sokaságokat, ha azok ugyanazt a valódi vektort jelentik.

2. Gyakorlat: Ahhoz, hogy az a_{pq} és $b_p{}^q$ sokaságok ugyanazt a másodrendű tenzort jelentsék az (x) görbevonalú KR-ben az

$$a_{pq} \mathbf{g}^p \otimes \mathbf{g}^q = b_p{}^r \mathbf{g}^p \otimes \mathbf{g}_r$$

összefüggésnek kell fennállnia. Ha ezt az egyenletet balról $\mathbf{g}_k$-val, jobbról pedig $\mathbf{g}_\ell$-el skalárisan megszorozzuk, és kihasználjuk a jól ismert $\mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}^p = \delta^p_k$, $\mathbf{g}^q \cdot \mathbf{g}_\ell = \delta^q_\ell$, $\mathbf{g}_r \cdot \mathbf{g}_\ell = g_{r\ell}$ összefüggéseket, valamint indexátnevező operátorként működtetjük a Kronecker-deltát, akkor apjuk, hogy

$$a_{k\ell} = b_r{}^q g_{r\ell} \, .$$

Hasonló gondolatmenettel mutatható meg, hogy a

$$a_{k\ell} = g_{kp} c^p{}_\ell$$

és

$$a_{k\ell} = g_{kp} d^{pq} g_{p\ell}$$

összefüggéseknek is fenn kell állnia. A fenti képletek az indexemelés és süllyesztés szabályai - ezek kötik tehát össze a a_{pq}, $b_p{}^r$, $c^p{}_q$ és a d^{pq} sokaságokat, ha azok ugyanazt a másodrendű tenzort reprezentálják.

3. Gyakorlat: A

$$'g^{mn} = {}'\mathbf{g}^m \cdot {}'\mathbf{g}^n = \frac{\partial \xi^m}{\partial x^p}\frac{\partial \xi^n}{\partial x^q}\mathbf{g}^p \cdot \mathbf{g}^q = \tau_p{}^m \tau_q{}^n\, g^{pq}$$

átalakításból azonnal következik, hogy valódi tenzor a g^{pq} metrikus tenzor. A fenti képlet a kovariáns metrikus tenzorokkal kapcsolatos (5.5) alatti összefüggés párja.

4. Gyakorlat: Az

$$'\varepsilon^{uvw} = \left({}'\mathbf{g}^u \times {}'\mathbf{g}^v\right) \cdot {}'\mathbf{g}^w = \frac{\partial \xi^u}{\partial x^p}\frac{\partial \xi^v}{\partial x^q}\frac{\partial \xi^w}{\partial x^r}\left(\mathbf{g}^p \times \mathbf{g}^q\right) \cdot \mathbf{g}^r = \tau_p{}^u \tau_q{}^v \tau_r{}^w\, \varepsilon^{pqr}$$

átalakításból azonnal következik, hogy valódi tenzor a kontravariáns ε^{pqr} tenzor. Ez az összefüggés egyébként a kovariáns permutációs tenzorral kapcsolatos (5.6) alatti egyenlet párja.

5. Gyakorlat: Az előző, azaz a 4. Gyakorlat megoldása szerint

$$'\gamma^o = '\varepsilon^{123} = \left({}'\mathbf{g}^1 \times {}'\mathbf{g}^2\right) \cdot {}'\mathbf{g}^3 = \frac{\partial \xi^1}{\partial x^p}\frac{\partial \xi^2}{\partial x^q}\frac{\partial \xi^3}{\partial x^r}\left(\mathbf{g}^p \times \mathbf{g}^q\right) \cdot \mathbf{g}^r =$$

$$= \tau_p{}^1 \tau_q{}^2 \tau_r{}^3\, \varepsilon^{pqr} = \tau_p{}^1 \tau_q{}^2 \tau_r{}^3\, e^{pqr}\gamma^o = \left|\tau_k^{\ell}\right| \gamma^o\,.$$

Következésképp ${}'\gamma^o \neq \gamma^o$, ami azt jelenti, hogy nem valódi skalár a γ^o.

A fenti eredmény átírható a

$$'\gamma^o = t^M \gamma^o; \qquad M = -1$$

alakba – $t = 1/\tau = 1/\left|\tau_k^{\ell}\right|$. Ez a képlet az (5.7b) alatti képlet párja.

6. Gyakorlat: A 4. Gyakorlat megoldása alapján írható, hogy

$$'\varepsilon^{uvw} = '\gamma^o {}'e^{uvw} = \left({}'\mathbf{g}^u \times {}'\mathbf{g}^v\right) \cdot {}'\mathbf{g}^w =$$

$$= \frac{\partial \xi^u}{\partial x^p}\frac{\partial \xi^v}{\partial x^q}\frac{\partial \xi^w}{\partial x^r}\left(\mathbf{g}^p \times \mathbf{g}^q\right) \cdot \mathbf{g}^r = \tau_p{}^u \tau_q{}^v \tau_r{}^w\, \varepsilon^{pqr} = \gamma^o \tau_p{}^u \tau_q{}^v \tau_r{}^w\, e^{pqr}\,.$$

Következésképp

$$e^{uvw} = \frac{\gamma^o}{'\gamma^o}\tau_p{}^u \tau_q{}^v \tau_r{}^w\, e^{pqr} = t^M \tau_p{}^u \tau_q{}^v \tau_r{}^w\, e^{pqr} \qquad M = 1$$

Mivel ${}'\gamma^o \neq \gamma^o$ azonnal következik a fenti képletből, hogy pszeudotenzor a felsőindexes permutációs szimbólum. A fenti eredmény egyben az (5.8) alatti összefüggés párja.

7. Gyakorlat: A

$$\gamma^\circ = [\mathbf{g}^1\ \mathbf{g}^2\ \mathbf{g}^3] = g^{1k} g^{2\ell} g^{3m} [\mathbf{g}_k\ \mathbf{g}_\ell\ \mathbf{g}_m] =$$

$$= g^{1k} g^{2\ell} g^{3m} \varepsilon_{k\ell m} = \underbrace{g^{1k} g^{2\ell} g^{3m} e_{k\ell m}}_{g^\circ} \gamma_\circ = \frac{g^\circ}{\gamma^\circ}$$

átalakítás szerint

$$(\gamma^\circ)^2 = g^\circ\,.$$

Következésképp – tekintettel a ${}'\gamma^o \neq \gamma^o$ egyenlőtlenségre – fennáll, hogy ${}'g^o \neq g^o$. Ez azt jelenti, hogy nem valódi skalár a g°. Mivel $g_\circ = 1/g^\circ$ azonnal adódik, hogy a $g_\circ$ sem valódi skalár.

8. Gyakorlat: Legyen az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ két tetszőleges vektor. A gyakorlat állításának helyessége azonnal következik az

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_k b^k = a_k \delta_\ell^k b^\ell = a_k \underbrace{t_s^{\ k} \tau_\ell^{\ s}}_{\delta_\ell^k} b^\ell = \underbrace{a_k t_s^{\ k}}_{'a_s} \underbrace{\tau_\ell^{\ s} b^\ell}_{'b^s} = {}'a_s\, {}'b^s$$

átalakításból.

9. Gyakorlat: Az igazolást csak másodrendű tenzorokra vázoljuk ugyanis a gondolatmenet minden más esetben változatlan. Legyen a_k^{ℓ} és b_k^{ℓ} két valódi másodrendű tenzor. Ez esetben nyilvánvaló, hogy

$$'a_p^{\ q} = a_k^{\ell} t_p^{\ k} \tau_\ell^{\ q} \qquad \text{és} \qquad 'b_p^{\ q} = b_k^{\ell} t_p^{\ k} \tau_\ell^{\ q} \,.$$

Legyen továbbá α és β a két súly. A gyakorlat állításának helyessége az előzőek alapján írható

$$\alpha' a_p^{\ q} + \beta' b_p^{\ q} = \alpha a_k^{\ell} t_p^{\ k} \tau_\ell^{\ q} + \beta b_k^{\ell} t_p^{\ k} \tau_\ell^{\ q} = \left(\alpha a_k^{\ell} + \beta b_k^{\ell}\right) t_p^{\ k} \tau_\ell^{\ q}$$

összefüggés következménye, hiszen ez világosan mutatja, hogy a vonatkozó transzformáció szabályai a súlyozott összegre is érvényesek maradnak. Vegyük észre, hogy a kapott eredmény összhangban van az (5.3) összefüggéssel.

10. Gyakorlat: Legyen $a_k^{\ell r}$ és b_{sq} két valódi tenzor. Ez esetben fennállnak a

$$'a_u^{\ vw} = a_k^{\ \ell r} t_u^{\ k} \tau_\ell^{\ v} \tau_r^{\ w} \qquad \text{és} \qquad 'b_{mn} = b_{sq} t_m^{\ s} t_n^{\ q}$$

összefüggések. Tekintsük elsőként az $'a_u^{\ vw}\, 'b_{wn} = 'c_u^{\ v}{}_n$ skaláris szorzatot. Nyilvánvaló, hogy

$$\underline{'c_u^{\ v}{}_n} = 'a_u^{\ vw}\, 'b_{wn} = a_k^{\ \ell r} t_u^{\ k} \tau_\ell^{\ v} \tau_r^{\ w}\, b_{sq} t_w^{\ s} t_n^{\ q} =$$
$$= a_k^{\ \ell r} t_u^{\ k} \tau_\ell^{\ v} \underbrace{\tau_r^{\ w} t_w^{\ s}}_{\delta_r^s} b_{sq}\, t_n^{\ q} = \underbrace{a_k^{\ \ell r}\, b_{rq}}_{c_k^{\ \ell}{}_q}\, t_u^{\ k} \tau_\ell^{\ v}\, t_n^{\ q} = \underline{c_k^{\ \ell}{}_q t_u^{\ k} \tau_\ell^{\ v}\, t_n^{\ q}} \,.$$

Kiolvasható innen, hogy a tekintett skaláris szorzat – lásd az aláhúzott képletrészeket – eleget tesz a vonatkozó transzformációs szabályoknak. A gondolatmenet a két tenzor más skaláris szorzataira (más index összeejtésekre) is változatlanul alkalmazható.

Ugyanilyen módon mutatható meg, hogy a $'a_u^{\ vw}\, 'b_{mn} = 'd_u^{\ vw}{}_{mn}$ szorzat esetén fennáll a

$$\underbrace{'a_u^{\ vw}\, 'b_{mn}}_{'d_u^{\ vw}{}_{mn}} = \underbrace{a_k^{\ \ell r} b_{sq}}_{d_k^{\ \ell r}{}_{sq}} t_u^{\ k}\, \tau_\ell^{\ v}\, \tau_r^{\ w}\, t_m^{\ s}\, t_n^{\ q}$$

egyenlet. Ez azt jelenti, hogy két valódi tenzor tenzoriális szorzata is valódi tenzor.

11. Gyakorlat: Ha a $c_k = a_{k\ell} b^{\ell}$ szorzatba helyettesítjük a c_k és b^{ℓ}-hez tartozó $c_K = c_{<K>}/\sqrt{g^{KK}}$ és $b^L = b^{<L>}/\sqrt{g_{LL}}$ fizikai koordinátákat, akkor kapjuk, hogy

$$\frac{c_{<K>}}{\sqrt{g^{KK}}} = \sum_{L=1}^{3} a_{KL} \frac{b^{<L>}}{\sqrt{g_{LL}}} \qquad \text{azaz, hogy} \qquad c_{<K>} = \sum_{L=1}^{3} \underbrace{a_{KL} \sqrt{\frac{g^{KK}}{g_{LL}}}}_{a_{<KL>}} b^{<L>} \,.$$

Innen azonnal adódik az igazolni kívánt

$$a_{<KL>} = a_{KL} \sqrt{\frac{g^{KK}}{g_{LL}}}$$

összefüggés. Ami a baloldali fizikai koordinátákat illeti a fenti gondolatmenettel kapjuk a $d_\ell = b^k a_{k\ell}$ szorzatból a

$$\frac{d_{<L>}}{\sqrt{g^{LL}}} = \sum_{K=1}^{3} \frac{b^{<K>}}{\sqrt{g_{KK}}} a_{KL} \quad \longrightarrow \quad d_{<L>} = \sum_{K=1}^{3} d^{<K>} \underbrace{a_{KL} \sqrt{\frac{g^{LL}}{g_{KK}}}}_{a_{<KL>}}$$

vagyis az

$$a_{<KL>} = a_{KL} \sqrt{\frac{g^{LL}}{g_{KK}}}$$

eredményt.

12. Gyakorlat: Az előző gyakorlat megoldásának gondolatmenet alapján indulva ki a $c^p = a^{pq}b_q$ szorzatból írhatjuk, hogy

$$\frac{c^{<P>}}{\sqrt{g_{PP}}} = \sum_{Q=1}^{3} a^{PQ}\frac{b_{<Q>}}{\sqrt{g^{QQ}}} \qquad \text{azaz, hogy} \qquad c^{<P>} = \sum_{Q=1}^{3} \underbrace{a^{PQ}\sqrt{\frac{g_{PP}}{g^{QQ}}}}_{a^{<PQ>}} b_{<Q>}\,.$$

Innen azonnal következik a jobboldali fizikai koordinátákat adó képlet:

$$a^{<PQ>} = a^{PQ}\sqrt{\frac{g_{PP}}{g^{QQ}}}\,.$$

Ami a baloldali fizikai koordinátákat illeti nem nehéz a fentiek és a $d^q = b_p a^{pq}$ szorzat felhasználásával ellenőrizni, hogy helyes a

$$a^{<PQ>} = a^{PQ}\sqrt{\frac{g_{QQ}}{g^{PP}}}$$

összefüggés.

B.6. 6. Fejezet

1. Gyakorlat: Az igazolást csak a $(6.2a)_1$ esetre ismertetjük. A (6.1) képlet alapján zérus értékű kell legyen a (6.3) különbség. Az idézett különbségben a kivonandónak

$$v^p\mathbf{g}_p\cdot\underbrace{\left(a_{k\ell}\mathbf{g}^k\otimes\mathbf{g}^\ell\right)}_{\boldsymbol{A}}\cdot w^q\mathbf{g}_q = v^p\delta_p^{\,k}a_{k\ell}\delta^\ell_{\,q}w^q = v^p a_{pq}w^q = \underline{w^p a_{qp}v^q} = w^p\underbrace{\delta_p^{\,\ell}}_{\mathbf{g}_p\cdot\mathbf{g}^\ell}a_{k\ell}\underbrace{\delta_q^{\,k}}_{\mathbf{g}^k\cdot\mathbf{g}_q}v^q =$$

$$= \boxed{w^p\,\mathbf{g}_p\cdot\left(a_{kl}\,\mathbf{g}^\ell\otimes\mathbf{g}^k\right)\cdot v^q\,\mathbf{g}_q}$$

kisebbítendőnek pedig

$$\boxed{w^p\mathbf{g}_p\cdot\left(\left(a^T\right)_{k\ell}\mathbf{g}^k\otimes\mathbf{g}^\ell\right)\cdot v^q\mathbf{g}_q} = w^p\delta_p^{\,k}\left(a^T\right)_{k\ell}\delta^\ell_{\,q}v^q = \underline{w^p\left(a^T\right)_{pq}v^q}$$

az értéke. Mivel zérus az idézett különbség teljesülnie kell egyrészről a keretezett képletrészek alapján írható

$$\mathbf{w}\cdot\left[\boldsymbol{A}^T - a_{kl}\,\mathbf{g}^l\otimes\mathbf{g}^k\right]\cdot\mathbf{v} = 0\,, \tag{B.5}$$

összefüggésnek, másrészről pedig az aláhúzott képletrészek alapján adódó

$$w_p\,\left(a^T\right)_{pq}v^q - w^p\,a_{qp}\,v_q = 0 \tag{B.6}$$

egyenletnek. A (B.5) egyenlet csak akkor teljesülhet tetszőleges $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ esetén, ha

$$\boldsymbol{A}^T = a_{kl}\,\mathbf{g}^l\otimes\mathbf{g}^k\,. \tag{B.7}$$

Vegyük észre, hogy a fenti képletben az $\boldsymbol{A}$ tenzor előállításához képest – lásd az első kapcsos zárójellel megjelölt képletrészt a jelen megoldás első képletében – fordított a bázisvektorok sorrendje a (B.7) jobboldalán (a bázistenzort alkotó diádban). Következésképp azt a szabályt olvashatjuk ki a (B.7) képletből, hogy az $\boldsymbol{A}=a_{k\ell}\mathbf{g}^k\otimes\mathbf{g}^\ell$ alakban írt másodrendű tenzor transzponáltja is úgy kapható meg, hogy felcseréljük a bázistenzort alkotó diádban a bázisvektorok szorzási sorrendjét. Tömören: *a transzponálás művelete a bázistenzort alkotó diádok szorzási sorrendjének cseréje.*

A másik két esetben részint a 6.1.1. szakasz gondolatmenetének (lásd a tenzor $(6.2a)_3$ alatti alakját) alapján, részint pedig fentiek alapján (lásd a tenzor $(6.2a)_4$ alatti alakját) látható be, hogy a transzponálás művelete ezekben az eseteken is a bázistenzort alkotó diádok szorzási sorrendjének cseréje.

2. Gyakorlat: A transzponáltat értelmező (6.1) egyenletet baloldalát tekintve a

$$\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{w} = v^k\,\mathbf{g}_k\cdot\underbrace{(a_{pq}\,\mathbf{g}^p\otimes\mathbf{g}^q)}_{\boldsymbol{A}}\cdot w^\ell\,\mathbf{g}_\ell = v^k\,a_{k\ell}\,w^\ell = \underline{w^k\,a_{\ell k}v^\ell}$$

a jobboldalt tekintve pedig a

$$\mathbf{w}\cdot\boldsymbol{A}^T\cdot\mathbf{v} = w^k\,\mathbf{g}_k\cdot\underbrace{\Big(\big(a^T\big)_{pq}\,\mathbf{g}^p\otimes\mathbf{g}^q\Big)}_{\boldsymbol{A}^T}\cdot v^\ell\,\mathbf{g}_\ell = \underline{w^k\,\big(a^T\big)_{k\ell}\,v^\ell}$$

összefüggés áll fenn. Az aláhúzott részek egyenlőségéből tekintettel w^k és v^ℓ tetszőleges voltára adódik, hogy

$$\big(a^T\big)_{k\ell} = a_{\ell k}\,.$$

A másik két esetben a fenti lépések értelemszerű alkalmazásával kapható meg a kívánt eredmény.

3. Gyakorlat: Valódi vektor a kérdéses

$$d^{(a)\,s} = -\frac{1}{2}\,\varepsilon^{qrs}\,d_{qr}$$

vektorinvariáns, ha (ξ) KR-beli

$$'d^{(a)\,w} = -\frac{1}{2}\,'\varepsilon^{uvw}\,'d_{uv}$$

értelmezése, megegyezik a $d^{(a)\,s}$ vektor

$$'d^{(a)\,w} = d^{(a)\,s}\tau_s{}^w$$

transzformáltjával. A vonatkozó transzformációs képletek alapján az elérni kívánt eredmény adódik:

$$\begin{aligned}'d^{(a)\,w} &= -\frac{1}{2}\,'\varepsilon^{uvw}\,'d_{uv} = -\frac{1}{2}\tau_q{}^u\,\tau_r{}^v\tau_s{}^w\varepsilon^{qrs}t_u{}^m t_v{}^n d_{mn} = \\ &= -\frac{1}{2}\underbrace{\tau_q{}^u\,t_u{}^m}_{\delta_q^m}\underbrace{\tau_r{}^v t_v{}^n}_{\delta_r^n}\varepsilon^{qrs}d_{mn}\tau_s{}^w = -\frac{1}{2}\varepsilon^{qrs}d_{qr}\tau_s{}^w = d^{(a)\,s}\tau_s{}^w\,.\end{aligned}$$

Ez egyben a gyakorlat állításának igazolása.

4. Gyakorlat: Ha a (6.24) képletben az eleve ferdeszimmetrikus s_{pq} tenzort gondoljuk a $d_{[lm]}$ helyére, illetve az s_{pq} tenzor $s^{(a)\,r}$ vektorinvariánsát a $d^{(a)\,r}$ helyére akkor értelemszerű betűcserékkel írhatjuk, hogy

$$s_{pq} = -\varepsilon_{pqr}\,s^{(a)\,r}\,.$$

Nyilvánvaló az $\varepsilon_{PPr} = 0$ ($P = 1{,}2{,}3$) egyenlet alapján az

$$s_{11} = s_{22} = s_{33} = 0\,.$$

képletek helyessége.

Kihasználva a továbbiakban a $\varepsilon_{pqr} = \sqrt{g_\circ}e_{pqr}$ összefüggést, valamint a permutációs szimbólum tulajdonságait írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} s_{12} &= -\sqrt{g_\circ}e_{123}s^{(a)3} = -\sqrt{g_\circ}s^{(a)3}\,, & s_{21} &= -s_{21}\,,\\ s_{13} &= -\sqrt{g_\circ}e_{132}s^{(a)2} = \sqrt{g_\circ}s^{(a)2}\,, & s_{31} &= -s_{13}\,,\\ s_{23} &= -\sqrt{g_\circ}e_{231}s^{(a)1} = -\sqrt{g_\circ}s^{(a)1}\,, & s_{32} &= -s_{23}\,. \end{aligned}$$

Következésképp

$$[s_{pq}] = \sqrt{g_o}\begin{bmatrix} 0 & -s^{(a)3} & s^{(a)2} \\ s^{(a)3} & 0 & -s^{(a)1} \\ -s^{(a)2} & s^{(a)1} & 0 \end{bmatrix}\,. \tag{B.8}$$

Ezt kellett megmutatni.

5. Gyakorlat: A gyakorlat állításának helyessége azonnal következik az

$$'d_\ell{}^\ell = 'd_\ell{}^s \delta_s^\ell = 'd_\ell{}^s \underbrace{\tau_k^\ell t_s^k}_{\delta_s^\ell} = \tau_k^\ell \, 'd_\ell{}^s \, t_s^k = d_k{}^k$$

átalakításból.

6. Gyakorlat: A (6.30a) összefüggés helyessége azonnal következik az értelmezés alapján írható

$$\operatorname{tr} \boldsymbol{D} = \boldsymbol{I} \cdot\cdot \boldsymbol{D} = d_\ell{}^\ell$$

képlet és az ugyancsak az értelmezés alapján írható

$$\operatorname{tr} \boldsymbol{D}^T = \boldsymbol{I} \cdot\cdot \boldsymbol{D}^T = d^k{}_k = g^{k\ell} \, d_\ell{}^s g_{sk} = \underbrace{g_{sk} \, g^{k\ell}}_{\delta_s{}^\ell} d_\ell{}^s = d_\ell{}^\ell$$

képlet egybevetéséből.

A (6.30b) összefüggés helyessége azonnal következik a

$$\operatorname{tr} \, (\boldsymbol{D} + \boldsymbol{S}) = \boldsymbol{I} \cdot\cdot \, (\boldsymbol{D} + \boldsymbol{S}) \, = \boldsymbol{I} \cdot\cdot \boldsymbol{D} + \boldsymbol{I} \cdot\cdot \boldsymbol{S} = \operatorname{tr} \boldsymbol{D} + \operatorname{tr} \boldsymbol{S}$$

átalakításból.

7. Gyakorlat: A (6.30c) képlet baloldalának átalakításával kapjuk az igazolni kívánt eredményt:

$$\operatorname{tr} \, (\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{S}) = \boldsymbol{I} \cdot\cdot \, (\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{S}) = d_{k\ell} \, s^{\ell k} = s^{\ell k} d_{k\ell} = \boldsymbol{I} \cdot\cdot \, (\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{D}) = \operatorname{tr} \, (\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{S}) \, .$$

A (6.30d) képlet esetén az alábbi átalakítások igazolják az egyes képletrészek helyességét:

$$\operatorname{tr} \, \left(\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{S}^T\right) = d_{k\ell} \left(s^T\right)^{\ell k} = \underbrace{s^{k\ell} d_{k\ell}}_{\boldsymbol{S} \cdot\cdot \boldsymbol{D}} = \underbrace{\left(s^T\right)^{\ell k} \left(d^T\right)_{\ell k}}_{\boldsymbol{S}^T \cdot\cdot \boldsymbol{D}^T} = \underbrace{s^{k\ell} \left(d^T\right)_{\ell k}}_{\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{D}^T\right)} =$$

$$= \underbrace{\left(d^T\right)_{\ell k} \, s^{k\ell}}_{\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{D}^T \cdot \boldsymbol{S}\right)} = \underbrace{\left(s^T\right)^{\ell k} \, d_{k\ell}}_{\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{S}^T \cdot \boldsymbol{D}\right)} .$$

8. Gyakorlat: Értelmezése szerint

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \varphi$$

a skaláris szorzat értéke, ahol $\varphi \in [0, \pi]$ a két vektor által bezárt szög. Mivel $|\cos \varphi| \leq 1$ nyilvánvaló a fenti értelmezés alapján a bizonyítani kívánt

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$$

Schwartz-féle egyenlőtlenség.

9. Gyakorlat: Nyilvánvaló, hogy az

$$f(x) = (\boldsymbol{D} - x\boldsymbol{S}) \cdot\cdot \, (\boldsymbol{D} - x\boldsymbol{S}) = \boldsymbol{D} \cdot\cdot \boldsymbol{D} - 2 \, \boldsymbol{D} \cdot\cdot \boldsymbol{S} + x^2 \boldsymbol{S} \cdot\cdot \boldsymbol{S}$$

függvény értéke pozitív, illetve speciális esetben zérus. Következésképp az $f(x) = 0$ másodfokú egyenletnek vagy két komplex, vagy speciális esetben egy kettős valós gyöke van. Ez csak akkor lehetséges, ha az egyenlet d diszkriminánsa vagy negatív, vagypedig zérus:

$$d = 4 \, (\boldsymbol{D} \cdot\cdot \boldsymbol{S})^2 - 4 \, (\boldsymbol{D} \cdot\cdot \boldsymbol{D}) \, (\boldsymbol{S} \cdot\cdot \boldsymbol{S}) \leq 0 \, .$$

Innen azonnal adódik a bizonyítani kívánt

$$|\boldsymbol{D} \cdot\cdot \boldsymbol{S}| \leq |\boldsymbol{D}| \, |\boldsymbol{S}|$$

egyenlőtlenség.

10. Gyakorlat: A (3.9) alapján indexcserékkel felírható

$$A_\ell{}^m = \frac{1}{2}\, e_{\ell jk} e^{mst}\, a_s{}^j\, a_t{}^k$$

összefüggés, valamint a $(3.10)_3$ alapján ugyancsak indexcserékkel felírható

$$a_{nl}{}^\ell\, \frac{A_\ell{}^m}{|a_u{}^v|} = \delta_n{}^m$$

képletek egybevetése alapján adódik, hogy

$$\left(a^{-1}\right)_\ell{}^m = \frac{A_\ell{}^n}{|a_s{}^j|} = \frac{1}{2!\ |a_u{}^v|}\, e_{\ell jk} e^{mst}\, a_s{}^j\, a_t{}^k\,.$$

Ezt kellett igazolni.

11. Gyakorlat: Nyilvánvaló az előző képlet alapján, hogy

$$\left(a^{-1}\right)^m{}_r = \frac{1}{2!\ |a^v{}_u|}\, e^{mst} e_{rjk}\, a^j{}_s\, a^k{}_t\,.$$

12. Gyakorlat: Azt kell megmutatni a főtengelyek által alkotott KR-ben, hogy fennáll az

$$\boldsymbol{A}^3 - A_I\, \boldsymbol{A}^2 + A_{II}\, \boldsymbol{A} - A_{III} \boldsymbol{I} = \boldsymbol{0}$$

egyenlet. Jelölje rendre λ_i és $\mathbf{n}_i$ az $\boldsymbol{A}$ tenzor i-edik sajátértékét és sajátvektorát. Nyilvánvaló, hogy

$$\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i\,, \qquad \boldsymbol{A}^2 = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i^2 \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i\,, \tag{B.9}$$

$$\boldsymbol{A}^3 = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i^3 \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i\,, \qquad \boldsymbol{I} = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \tag{B.10}$$

és, hogy

$$A_I = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3\,, \qquad A_{II} = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1\,, \qquad A_{III} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\,.$$

A fenti egyenletek helyettesítésével kapjuk, hogy

$$\boldsymbol{A}^3 - A_I\, \boldsymbol{A}^2 + A_{II}\, \boldsymbol{A} - A_{III} \boldsymbol{I} =$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \left[\lambda_i^3 - (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1)\, \lambda_i^2 + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1)\, \lambda_i - \lambda_1\lambda_2\lambda_3\right] \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i\,.$$

Ha $i = 1$, akkor azonnal adódik, hogy az $\mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i$ tag együtthatója zérus:

$$\lambda_1^3 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\, \lambda_1^2 + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3)\, \lambda_1 - \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0\,.$$

Ha $i = 2$, vagy $i = 3$, akkor ugyanilyen módon adódik a vonatkozó együtthatók eltűnése. Ezzel igazoltuk a Caley-Hamilton tétel fennállását a főtengelyek KR-ében.

13. Gyakorlat: A gyakorlat állítása azonnal adódik a (6.76) Caley-Hamilton tételből, ha átszorozzuk azt $\boldsymbol{A}^{-1}$-el.

14. Gyakorlat: Legyen a $\boldsymbol{B}$ és a $\boldsymbol{C}$ két másodrendű tenzor. Ezekre szorzatára nézve fennáll, hogy

$$(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C})^T = \boldsymbol{C}^T \cdot \boldsymbol{B}^T\,.$$

A további gondolatmenetben úgy alkalmazzuk majd ezt a szabályt, hogy arra külön nem hívjuk fel a figyelmet. Ki fogjuk azt is használni, hogy a szimmetrikus $\boldsymbol{A}$ tenzor transzponáltja önmaga: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T$.

Az $\boldsymbol{A}$ tenzor második hatványát tekintve írhatjuk, hogy

$$\left(\boldsymbol{A}^2\right)^T = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A})^T = \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^2\,.$$

Ezek szerint szimmetrikus tenzor a szimmetrikus tenzor második hatványa. Tegyük fel a továbbiakban, hogy szimmetrikus az $\boldsymbol{A}^s$ tenzor ($s \geq 2$). Megmutatjuk, hogy ez esetben szimmetrikus az $\boldsymbol{A}$ tenzor $s+1$-edik hatványa. Elemi átalakításokkal adódik, hogy

$$\left(\boldsymbol{A}^{s+1}\right)^T = (\boldsymbol{A}^s \cdot \boldsymbol{A})^T = \boldsymbol{A}^T \cdot (\boldsymbol{A}^s)^T = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^s = \boldsymbol{A}^{s+1} .$$

Ezt kellett igazolni.

15. Gyakorlat: A megoldást a feltett kérdések szerint tagolva közöljük.

1. A tenzor szimmetriájának ellenőrzésére számítsuk ki a kontravariáns koordinátákat (összetevőket):

$$[B^{mn}] = \left[B^m{}_q g^{qn}\right] = \begin{bmatrix} 104 & 30 & 0 \\ 120 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 48 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 104 & 120 & 0 \\ 120 & 160 & 0 \\ 0 & 0 & 48 \end{bmatrix}$$

Mivel $B^{mn} = B^{nm}$ a tenzor szimmetrikus. Megjegyezzük, hogy ugyanez az eredmény azonnal következik a

$$\boldsymbol{B}^T = \left(\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{F}^T\right)^T = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{F}^T = \boldsymbol{B}$$

átalakításból is.

2. A $\boldsymbol{B}$ tenzorral kapcsolatos karakterisztikus egyenlet az

$$-\left|B^p{}_q - \lambda \delta^p{}_q\right| = -\begin{vmatrix} 104-\lambda & 30 & 0 \\ 120 & 40-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 48-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 48) \begin{vmatrix} 104-\lambda & 30 \\ 120 & 40-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda - 48)\left(\lambda^2 - 144\lambda + 560\right) = 0$$

alakban írható le, ahonnan

$$\lambda_1 = 140 , \qquad \lambda_2 = 48 \qquad \text{és} \qquad \lambda_3 = 4$$

a három sajátérték. Következőleg pozitív definit a tenzor és így van négyzetgyöke.

3. Nyilvánvaló $[B^{mn}]$ szerkezetéből, figyelembevéve a gyökök sorrendjét, hogy a $\mathbf{g}_3$ irány a második főirány

$$\underset{(2)}{\mathbf{n}} = \mathbf{g}_3 .$$

Az első főirányt adó

$$\underset{(1)}{\mathbf{n}} = \underset{(1)}{n}{}^k \mathbf{g}_k$$

vektor a

$$\left[B^p{}_q - \lambda_1 \delta^p{}_q\right] \underset{(1)}{n}{}^q = 0$$

egyenlet alapján felírható

$$(104 - \lambda_1) \underset{(1)}{n}{}^1 + 30 \underset{(1)}{n}{}^2 = -36 \underset{(1)}{n}{}^1 + 30 \underset{(1)}{n}{}^2 = 0 ,$$

vagy

$$120 \underset{(1)}{n}{}^1 + (40 - \lambda_1) \underset{(1)}{n}{}^2 = 120 \underset{(1)}{n}{}^1 - 100 \underset{(1)}{n}{}^2$$

egyenletekből számítható. Az eredmény

$$\underset{(1)}{n}{}^1 = \frac{5}{6} \underset{(1)}{n}{}^2 .$$

A főirányok kölcsönös merőlegessége miatt az is nyilvánvaló, hogy

$$\underset{(1)}{n}{}^3 = 0 .$$

A főirányokat kijelölő irányvektorokkal kapcsolatos normálási feltétel szerint

$$\underset{(1)}{n}{}^k g_{kl} \underset{(1)}{n}{}^l = \underset{(1)}{n}{}^1 g_{11} \underset{(1)}{n}{}^1 + \underset{(1)}{n}{}^2 g_{22} \underset{(1)}{n}{}^2 = \left(\frac{25}{36} + \frac{1}{4}\right) \underset{(1)}{n}{}^2 \underset{(1)}{n}{}^2 = 1 ,$$

ahonnan

$$\underset{(1)}{n}{}^2 = \frac{6}{\sqrt{34}} \qquad \text{és} \qquad \underset{(1)}{n}{}^1 = \frac{5}{\sqrt{34}}\,.$$

Végeredményben

$$\underset{(1)}{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{34}}\left(5\mathbf{g}_1 + 6\mathbf{g}_2\right) = \frac{1}{\sqrt{34}}\left(5\mathbf{g}^1 + \frac{6}{4}\mathbf{g}^2\right)\,.$$

A harmadik főirány abból a feltételből adódik, hogy jobbsodratú kartéziuszi KR-t alkotnak a főirányok egységvektorai:

$$\underset{(3)}{\mathbf{n}} = \underset{(1)}{\mathbf{n}} \times \underset{(2)}{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{34}}\left(5\mathbf{g}_1 + 6\mathbf{g}_2\right) \times \mathbf{g}_3 = \frac{1}{\sqrt{34}}\left(5\varepsilon_{132}\mathbf{g}^2 + 6\varepsilon_{231}\mathbf{g}^1\right) =$$
$$= \frac{\sqrt{g_o}}{\sqrt{34}}\left(6\mathbf{g}^1 - 5\mathbf{g}^2\right) = \frac{1}{\sqrt{136}}\left(6\mathbf{g}^1 - 5\mathbf{g}^2\right) = \frac{1}{\sqrt{136}}\left(6\mathbf{g}_1 - 20\mathbf{g}_2\right)\,, \qquad g_o = \frac{1}{4}\,.$$

4. A főtengelyek KR-ében

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\lambda}_1 \underset{(1)}{\mathbf{n}} \circ \underset{(1)}{\mathbf{n}} + \boldsymbol{\lambda}_2 \underset{(2)}{\mathbf{n}} \circ \underset{(2)}{\mathbf{n}} + \boldsymbol{\lambda}_3 \underset{(3)}{\mathbf{n}} \circ \underset{(3)}{\mathbf{n}} =$$
$$= 140 \underset{(1)}{\mathbf{n}} \circ \underset{(1)}{\mathbf{n}} + 48 \underset{(2)}{\mathbf{n}} \circ \underset{(2)}{\mathbf{n}} + 4 \underset{(3)}{\mathbf{n}} \circ \underset{(3)}{\mathbf{n}}$$

a $\boldsymbol{B}$ tenzor diádikus szorzatokkal történő előállítása és

$$\boldsymbol{V} = \sqrt{140} \underset{(1)}{\mathbf{n}} \circ \underset{(1)}{\mathbf{n}} + \sqrt{48} \underset{(2)}{\mathbf{n}} \circ \underset{(2)}{\mathbf{n}} + 2 \underset{(3)}{\mathbf{n}} \circ \underset{(3)}{\mathbf{n}}$$

a tenzor négyzetgyöke, hiszen

$$\boldsymbol{V}^2 = \boldsymbol{B}\,.$$

5. Az (x) görbevonalú KR-re térve át írhatjuk, hogy

$$\boldsymbol{V} = \frac{\sqrt{140}}{34}\left(5\mathbf{g}_1 + 6\mathbf{g}_2\right) \circ \left(5\mathbf{g}^1 + \frac{6}{4}\mathbf{g}^2\right) + \sqrt{48}\mathbf{g}_3 \circ \mathbf{g}^3 +$$
$$+ \frac{1}{68}\left(6\mathbf{g}_1 - 20\mathbf{g}_2\right) \circ \left(6\mathbf{g}^1 - 5\mathbf{g}^2\right) = \left\{\frac{\sqrt{140}}{34}\left(25\mathbf{g}_1 + 30\mathbf{g}_2\right) + \frac{1}{68}\left(36\mathbf{g}_1 - 120\mathbf{g}_2\right)\right\} \circ \mathbf{g}^1 +$$
$$+ \left\{\frac{3\sqrt{140}}{68}\left(5\mathbf{g}_1 + 6\mathbf{g}_2\right) - \frac{5}{68}\left(6\mathbf{g}_1 - 20\mathbf{g}_2\right)\right\} \circ \mathbf{g}^2 + \sqrt{48}\mathbf{g}_3 \circ \mathbf{g}^3$$

azaz, hogy

$$\boldsymbol{V} = \left\{\frac{50\sqrt{140} + 36}{68}\mathbf{g}_1 + \frac{60\sqrt{140} - 120}{68}\mathbf{g}_2\right\} \circ \mathbf{g}^1 +$$
$$+ \left\{\frac{15\sqrt{140} - 30}{68}\mathbf{g}_1 + \frac{18\sqrt{140} + 100}{68}\mathbf{g}_2\right\} \circ \mathbf{g}^2 + \sqrt{48}\mathbf{g}_3 \circ \mathbf{g}^3\,.$$

Következésképp

$$\left[V^m_{\ q}\right] = \begin{bmatrix} \frac{50\sqrt{140}+36}{68} & \frac{15\sqrt{140}-30}{68} & 0 \\ \frac{60\sqrt{140}-120}{68} & \frac{18\sqrt{140}+100}{68} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{48} \end{bmatrix}\,,$$

és amint az némi számolással ellenőrzésként adódik:

$$\left[V^m{}_q\, V^q{}_n\right] = \begin{bmatrix} \frac{50\sqrt{140}+36}{68} & \frac{15\sqrt{140}-30}{68} & 0 \\ \frac{60\sqrt{140}-120}{68} & \frac{18\sqrt{140}+100}{68} & 0 \\ 0 & 0 & +\sqrt{48} \end{bmatrix} \times$$
$$\begin{bmatrix} \frac{50\sqrt{140}+36}{68} & \frac{15\sqrt{140}-30}{68} & 0 \\ \frac{60\sqrt{140}-120}{68} & \frac{18\sqrt{140}+100}{68} & 0 \\ 0 & 0 & +\sqrt{48} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 104 & 30 & 0 \\ 120 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 48 \end{bmatrix} = [B^m{}_n]\ .$$

B.7. 7. Fejezet

1. Gyakorlat: Nem nehéz ellenőrizni – mindkét tenzor szimmetrikus –, hogy

$$\underline{\mathbf{Q}}_1^{-1} = \underline{\mathbf{Q}}_1^T = \underline{\mathbf{Q}}_1 = \begin{bmatrix} 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{bmatrix}, \qquad \underline{\mathbf{Q}}_1\,\underline{\mathbf{Q}}_1^T = \underline{\mathbf{Q}}_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$\det\left(\underline{\mathbf{Q}}_1\right) = \begin{vmatrix} 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{vmatrix} = -1$$

és

$$\underline{\mathbf{Q}}_2^{-1} = \underline{\mathbf{Q}}_2^T = \underline{\mathbf{Q}}_2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 \\ 1/2 & 1/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \underline{\mathbf{Q}}_2\,\underline{\mathbf{Q}}_2^T = \underline{\mathbf{Q}}_2^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$\det\left(\underline{\mathbf{Q}}_2\right) = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 \\ 1/2 & 1/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \end{vmatrix} = -1\,.$$

Mivel negatív a két determináns egyik tenzor sem forgató tenzor.

2. Gyakorlat: Nem túl nehéz ellenőrizni, hogy

$$\det\left(\underline{\mathbf{Q}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} = 1\,.$$

Fennáll továbbá, hogy

$$\underline{\mathbf{Q}}\,\underline{\mathbf{Q}}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4} & \frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4} & \frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4} & \frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4} & \frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

azaz hogy

$$\underline{\mathbf{Q}}^T = \underline{\mathbf{Q}}^{-1}\,.$$

Következésképp forgató tenzor a $\boldsymbol{Q}$ tenzor. A továbbiakban szükség lesz a $\boldsymbol{Q}$ tenzor ferdeszimmetrikus részére. Jelölje ezt $\boldsymbol{S}$. Egyszerű számítással kapjuk, hogy

$$\underline{\mathbf{S}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\mathbf{Q}} - \underline{\mathbf{Q}}^T\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) & -\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1+\sqrt{2}}{4} & -\frac{1+\sqrt{2}}{4} \\ \frac{1+\sqrt{2}}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ \frac{1+\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}.$$

Figyelembevéve: (a) hogy kartéziuszi az (y^1, y^2, y^3) KR (egységnyi tehát a metrikus tenzor determinánsa), (b) és kihasználva a (B.8) képleteket kapjuk, hogy

$$\mathbf{q}^{(a)} = \mathbf{s}^{(a)} = s^{(a)1}\mathbf{i}_1 + s^{(a)2}\mathbf{i}_2 + s^{(a)3}\mathbf{i}_2 = \frac{1}{4}\mathbf{i}_1 - \frac{1+\sqrt{2}}{4}\mathbf{i}_2 + \frac{1+\sqrt{2}}{4}\mathbf{i}_3$$

a $\boldsymbol{Q}$ tenzor vektorinvariánsa. Vegyük észre, hogy az egységnyi abszolutértékű

$$\mathbf{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}_3$$

vektor merőleges $\mathbf{q}^{(a)}$-re, azaz benne fekszik a forgatás síkjában. Következésképp a forgatás φ szöge a

$$\cos\varphi = \mathbf{a}\cdot\underbrace{\boldsymbol{Q}\cdot\mathbf{a}}_{\mathbf{b}}$$

képletből számítható. Fentiek szerint az elforgatott $\mathbf{b}$ vektor:

$$\underline{\mathbf{b}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} -\frac{1+\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

és ezen részeredmény felhasználásával azonnal adódik a kereset szög koszinusza és maga a szög is:

$$\cos\varphi = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{1+\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1-\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0.457\,106\,78\,,$$

$$\varphi = 1.096\,056\,817 \text{ radián } = 62.79^\circ\,.$$

3. Gyakorlat: Legyen ortogonális a $\boldsymbol{Q}_1$ és $\boldsymbol{Q}_2$ tenzor. Ha a két tenzor összege is ortogonális akkor fenn kell állnia a

$$(\boldsymbol{Q}_1 + \boldsymbol{Q}_2)\cdot(\boldsymbol{Q}_1 + \boldsymbol{Q}_2)^T = \boldsymbol{I}$$

összefüggésnek. A képlet baloldalát átalakítva írhatjuk, hogy

$$\underbrace{\boldsymbol{Q}_1\cdot\boldsymbol{Q}_1^T}_{\boldsymbol{I}} + \underbrace{\boldsymbol{Q}_2\cdot\boldsymbol{Q}_2^T}_{\boldsymbol{I}} + \boldsymbol{Q}_1\cdot\boldsymbol{Q}_2^T + \boldsymbol{Q}_1\cdot\boldsymbol{Q}_2^T = \boldsymbol{I}\,,$$

vagy ami ugyanaz, hogy

$$\boldsymbol{I} + \underbrace{\boldsymbol{Q}_1\cdot\boldsymbol{Q}_2^T + \boldsymbol{Q}_1\cdot\boldsymbol{Q}_2^T}_{-\boldsymbol{I}} = \mathbf{0}\,.$$

Az utóbbi egyenlet csak akkor állhat fenn ha a megjelölt képletrész a metrikus tenzor (az egységtenzor) ellentettje. Mivel ez a feltétel csak speciális esetben állhat fenn adódik a következtetés, hogy két ortogonális tenzor összege nem szükségképpen ortogonális tenzor.

4. Gyakorlat: A

$$(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{R})\cdot(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{R})^T=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{Q}\cdot\underbrace{\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R}^T}_{\boldsymbol{I}}\cdot(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{Q})^T=$$
$$=\boldsymbol{P}\cdot\underbrace{\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{Q}^T}_{\boldsymbol{I}}\cdot\boldsymbol{P}^T=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{P}^T=\boldsymbol{I}$$

átalakításból azonnal következik a gyakorlat állításának helyessége.

Jelölje $\boldsymbol{W}$ a $\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{R}$ szorzatot. Nyilvánvaló a (6.6a) képlet alapján, hogy

$$W_s{}^r=P_s{}^u\,Q_u{}^v\,R_v{}^r=\left(W^T\right)^r{}_s\ .$$

Következésképp

$$P^k_\ell\,Q^\ell{}_q R^q{}_r\ \left(W^T\right)^r{}_s=P^k_\ell\,Q^\ell{}_q\,\underbrace{R^q{}_r\,R_v{}^r}_{\delta^q{}_v}\,Q_u{}^v\,P_s{}^u=$$
$$=P^k_\ell\,\underbrace{Q^\ell{}_v\,Q_u{}^v}_{\delta^\ell{}_u}\,P_s{}^u=P^k_\ell\,P_s{}^\ell=\delta^k{}_s\ .$$

Ez az átalakítás indexes jelölésmódban igazolja a gyakorlat állítását.

5. Gyakorlat: A számításokat az (y^1,y^2,y^3) kartéziuszi KR-ben végezzük. Következik a $\boldsymbol{P}=P_k{}^\ell\,\mathbf{i}^k\otimes\mathbf{i}_\ell$ tenzor értelmezéséből, hogy alkalmas sor (illetve oszlopcserékkel) diagonálissá tehető a tenzor $\underline{\mathbf{P}}$ mátrixa. Mivel a főátlóban ekkor mindenütt az egyes szám áll azonnal adódik, hogy egységnyi a tenzor determinánsa: $\det(\boldsymbol{P})=1$. Legyen továbbá $\boldsymbol{M}=M_r{}^s\,\mathbf{i}^r\otimes\mathbf{i}_s$ tetszőleges másodrendű tenzor. Tegyük fel, hogy $P_K{}^L=1$ ($P_q{}^L=0, q\neq K$). Tekintsük a $T_k{}^s=P_k{}^r M_r{}^s$ szorzatot. Nyilvánvaló a $\boldsymbol{P}$ értelmezéséből, hogy az $M_L{}^s$ sor (az L-edik sor) a szorzat $T_K{}^s$ sora (a szorzat K-adik sora) lesz. Következésképp $\left(P^{-1}\right)_k{}^\ell$, meg kell hogy egyezzen $\left(P^T\right)_k{}^\ell=P^\ell{}_k$-val, mert csak ekkor történik meg visszafelé a sorcsere, azaz csak ekkor áll fenn, hogy $\left(P^{-1}\right)_k{}^\ell T_\ell{}^s=M_r{}^s$.

6. Gyakorlat: Mivel szimmetrikus a

$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{I}-2\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}$$

tenzor fennáll, hogy

$$\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{Q}^T=\boldsymbol{Q}^2=(\boldsymbol{I}-2\mathbf{a}\otimes\mathbf{a})\cdot(\boldsymbol{I}-2\mathbf{a}\otimes\mathbf{a})=$$
$$=\boldsymbol{I}-2\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}-2\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}+4\underbrace{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})}_{=1}\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}=\boldsymbol{I}$$

Ez azt jelenti, hogy valóban ortogonális a $\boldsymbol{Q}$ tenzor.

Indexes jelölésmódban

$$Q^k{}_\ell=\delta^k{}_\ell-2a^k a_l$$

a kérdéses tenzor alakja, és a tenzor szimmetriáját is kihasználva fennáll, hogy

$$Q^k{}_\ell Q^\ell{}_s=\left(\delta^k{}_\ell-2a^k a_\ell\right)\left(\delta^\ell{}_s-2a^\ell a_s\right)=$$
$$=\delta^k{}_s-2a^k a_s-2a^k a_s+4\underbrace{a^\ell a_\ell}_{=1}a^k a_s=\delta^k{}_s\ .$$

Ez az átalakítás ugyancsak a gyakorlat állításának igazolása.

7. Gyakorlat: Legyen ortogonális a $\boldsymbol{Q}$ tenzor. Nyilvánvaló,hogy

$$\boldsymbol{Q}^2\cdot\left(\boldsymbol{Q}^2\right)^T=\boldsymbol{Q}\cdot\underbrace{\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{Q}^T}_{\boldsymbol{I}}\cdot\boldsymbol{Q}^T=\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{Q}^T=\boldsymbol{I}\,.$$

Ez azt jelenti, hogy ortogonális tenzor az ortogonális tenzor második hatványa. Tegyük fel a továbbiakban, hogy ortogonális a $\boldsymbol{Q}^s$ tenzor – $s\geq 2$. Megmutatjuk, hogy ez esetben

ortogonális a $\boldsymbol{Q}$ tenzor $s+1$-edik hatványa. Elemi átalakításokkal adódik, hogy

$$\left(\boldsymbol{Q}^{s+1}\right)\cdot\left(\boldsymbol{Q}^{s+1}\right)^T=(\boldsymbol{Q}^s\cdot\boldsymbol{Q})\cdot(\boldsymbol{Q}^s\cdot\boldsymbol{Q})^T=\boldsymbol{Q}^s\cdot\underbrace{\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{Q}^T}_{\boldsymbol{I}}\cdot(\boldsymbol{Q}^s)^T=\boldsymbol{Q}^s\cdot(\boldsymbol{Q}^s)^T=\boldsymbol{I}\,.$$

Ezt kellett igazolni.

8. Gyakorlat: Tekintsük a $\boldsymbol{Q}^T\cdot\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{Q}^T=\boldsymbol{I}$ szorzat determinánsát. A determinánsok szorzástételét kihasználva írható, hogy

$$\det\left(\boldsymbol{Q}^T\cdot\boldsymbol{Q}\right)=\det\left(\boldsymbol{Q}^T\right)\det\left(\boldsymbol{Q}\right)=\left[\det\left(\boldsymbol{Q}\right)\right]^2=\det\left(\boldsymbol{I}\right)=1\,,$$

ahonnan

$$\det\left(\boldsymbol{Q}\right)=\pm1\,.$$

A továbbiakban vizsgáljuk meg – összhangban a Gyakorlat célkitűzésével, hogy ismeretlennek tekintve az $\mathbf{a}$ vektort van-e a

$$\boldsymbol{Q}\cdot\mathbf{a}=\pm\mathbf{a}$$

feladatnak megoldása. Ha van, akkor fennáll a

$$\boldsymbol{Q}^T\cdot\mathbf{a}=\boldsymbol{Q}^T\cdot(\pm\boldsymbol{Q}\cdot\mathbf{a})=\pm\underbrace{\boldsymbol{Q}^T\cdot\boldsymbol{Q}}_{\boldsymbol{I}}\cdot\mathbf{a}=\pm\mathbf{a}$$

egyenlet is. Vonjuk ki az utóbbi egyenletet az azt megelőző egyenletből majd osszuk el az eredményt kettővel. Tekintettel a másodrendű tenzorok ferdeszimmetrikus részét értelmező (6.18) képletre kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{Q}^T\right)\cdot\mathbf{a}=\boldsymbol{Q}_{\mathrm{asz}}\cdot\mathbf{a}=\mathbf{0}\,.$$

Jelölje $\mathbf{q}_a$ a $\boldsymbol{Q}$ tenzor vektorinvariánsát. A vektorinvariáns birtokában átírható a (6.26) összefüggés szerint a fenti képlet:

$$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{asz}}\cdot\mathbf{a}=\mathbf{q}_a\times\mathbf{a}=\mathbf{0}\,.$$

Ez az eredmény azt jelenti, hogy a gyakorlatban felvetett feladat $\mathbf{a}$ megoldása párhuzamos a $\boldsymbol{Q}$ tenzor $\mathbf{q}_a$ vektorinvariánsával.

Tekintsük a továbbiakban a $\boldsymbol{Q}$ ortogonális tenzorral kapcsolatos

$$\boldsymbol{Q}\cdot\mathbf{a}=\lambda\mathbf{a}\,,\qquad|\mathbf{a}|=1$$

$$[\lambda\text{ a }\det\left(\boldsymbol{Q}-\lambda\boldsymbol{I}\right)=0\quad\text{polinom gyöke.}]$$

sajátértékfeladatot, amely $\lambda=\pm1$ esetén megegyezik formailag a Gyakorlatban felvetett feladattal. Ha az $\mathbf{a}$ sajátvektor és a λ sajátérték, akkor

$$\lambda^2=\lambda^2\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=\lambda\mathbf{a}\cdot\lambda\mathbf{a}=(\boldsymbol{Q}\cdot\mathbf{a})\cdot(\boldsymbol{Q}\cdot\mathbf{a})=\mathbf{a}\cdot\underbrace{\boldsymbol{Q}^T\cdot\boldsymbol{Q}}_{\boldsymbol{I}}\cdot\mathbf{a}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=1\,,$$

ahonnan valóban $\lambda=\pm1$.

Vizsgáljuk meg a továbbiakban az előjelek szerepét.

Tételezzük először fel, hogy $\det\left(\boldsymbol{Q}\right)=1$. Az alábbi és a viszonyok tisztázását célzó átalakításban (a) felhasználjuk, hogy a tenzor determinánsa megegyezik a transzponáltja determinánsával, (b) helyettesítjük, ahol szükséges a $\boldsymbol{Q}^T\cdot\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{I}$ képletet, és (d) alkalmazzuk a determinánsok szorzástételét:

$$\begin{aligned}\det\left(\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{I}\right)&=\det\left[\left(\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{I}\right)^T\right]=\det\left(\boldsymbol{Q}^T-\boldsymbol{I}\right)=\det\left(\boldsymbol{Q}^T-\boldsymbol{Q}^T\cdot\boldsymbol{Q}\right)=\\&=\det\left[\boldsymbol{Q}^T\cdot\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q}\right)\right]=\underbrace{\det\left(\boldsymbol{Q}^T\right)}_{\det(\boldsymbol{Q})=1}\det\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q}\right)=-\det\left(\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{I}\right)\,.\end{aligned}$$

Mivel egy valós szám akkor egyezik meg az ellentettjével, ha a szám zérus fennáll a

$$\det\left(\boldsymbol{Q}-\lambda\boldsymbol{I}\right)|_{\lambda=1}=\det\left(\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{I}\right)=0$$

egyenlet.

Tételezzük fel másodszorra, hogy $\det(\boldsymbol{Q}) = -1$. A fenti gondolatmenet ismétlésével kapjuk, hogy

$$\det(\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{I}) = \det\left[(\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{I})^T\right] = \det\left(\boldsymbol{Q}^T+\boldsymbol{I}\right) = \det\left(\boldsymbol{Q}^T+\boldsymbol{Q}^T\cdot\boldsymbol{Q}\right) =$$
$$= \det\left[\boldsymbol{Q}^T\cdot(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{Q})\right] = \underbrace{\det\left(\boldsymbol{Q}^T\right)}_{\det(\boldsymbol{Q})=1}\det(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{Q}) = -\det(\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{I})$$

azaz, hogy

$$\det(\boldsymbol{Q}-\lambda\boldsymbol{I})|_{\lambda=-1} = \det(\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{I}) = 0\,.$$

A kapott eredmények a következő módon foglalhatók össze:

$$\begin{array}{lll}\boldsymbol{Q}\cdot\mathbf{q}_a = \ \ \mathbf{q}_a\,, & \text{ha} & \det(\boldsymbol{Q}) = \ \ 1 \ \text{[ekkor ugyanis} \ \ \lambda = 1] \ \text{és}\\ \boldsymbol{Q}\cdot\mathbf{q}_a = -\mathbf{q}_a\,, & \text{ha} & \det(\boldsymbol{Q}) = -1 \ \text{[ekkor ugyanis} \ \ \lambda = -1]\,.\end{array}$$

Vegyük észre, hogy fennáll a

$$\boldsymbol{Q}^T\cdot\mathbf{q}_a = \pm\mathbf{q}_a$$

egyenlet is.

9. Gyakorlat: A megoldást tagoltan, a gondolatmenet lépéseit egymástól elkülönítve közöljük:

1. Első lépésben a $\boldsymbol{C} = C^k_{\ l}\,\mathbf{g}_k\circ\mathbf{g}^l = \boldsymbol{F}^T\cdot\boldsymbol{F}$ tenzort számítjuk ki:

$$[C^k_{\ l}] = [(F^T)^k_{\ s}F^s_{\ l}] = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0\\ -3.2 & 0 & 2.4\\ -1.2 & 0 & 3.4\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -0.8 & -1.2\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & 0.6 & 3.4\end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 12\\ 0 & 3 & 13\end{bmatrix}\,.$$

2. A karakterisztikus egyenlet mostmár a

$$-\left|C^p_{\ q}-\lambda C^p_{\ q}\right| = -\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 4-\lambda & 12\\ 0 & 3 & 13-\lambda\end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 12\\ 3 & 13-\lambda\end{vmatrix} =$$
$$= (\lambda-1)\left(\lambda^2-17\lambda+16\right)$$

alakban írható fel, ahonnan

$$\lambda_1 = 16 \qquad \text{és} \qquad \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

a három sajátérték. Következőleg pozitív definit a tenzor és van négyzetgyöke.

3. Nyilvánvaló $[C^k_{\ l}]$ mátrix szerkezetéből, hogy a $\mathbf{g}_1$ irány főirány. Legyen ez, összhangban a továbbiakkal, a második főirány:

$$\underset{(2)}{\mathbf{n}} = \mathbf{g}_1\,.$$

Az első főirányt adó

$$\underset{(1)}{\mathbf{n}} = \underset{(1)}{n}{}^k\mathbf{g}_k$$

vektor a

$$\left[C^p_{\ q}-\lambda_1 C^p_{\ q}\right]\underset{(1)}{n}{}^q = 0$$

egyenlet felhasználásával adódóan a

$$(4-\lambda_1)\underset{(1)}{n}{}^2+12\underset{(1)}{n}{}^3 = -12\underset{(1)}{n}{}^2+12\underset{(1)}{n}{}^3 = 0\,,$$

vagypedig a

$$3\underset{(1)}{n}{}^2+(13-\lambda_1)\underset{(1)}{n}{}^3 = 3\underset{(1)}{n}{}^2-3\underset{(1)}{n}{}^3$$

egyenletekből számítható. Az eredmény pedig:

$$\underset{(1)}{n}{}^{2} = \underset{(1)}{n}{}^{3} .$$

A főirányok merőlegessége miatt az is nyilvánvaló, hogy

$$\underset{(1)}{n}{}^{1} = 0 .$$

A normálási feltétel szerint

$$\underset{(1)}{n}{}^{k} g_{kl} \underset{(1)}{n}{}^{l} = \underset{(1)}{n}{}^{2} g_{22} \underset{(1)}{n}{}^{2} + \underset{(1)}{n}{}^{3} g_{22} \underset{(1)}{n}{}^{3} = (g_{22}+g_{33}) \underset{(1)}{n}{}^{2} \underset{(1)}{n}{}^{2} =$$
$$= \left(\frac{1}{4}+1\right) \underset{(1)}{n}{}^{2} \underset{(1)}{n}{}^{2} = 1 ,$$

ahonnan

$$\underset{(1)}{n}{}^{2} = \underset{(1)}{n}{}^{3} = \frac{2}{\sqrt{5}} .$$

Végeredményben

$$\underset{(1)}{\mathbf{n}} = \frac{2}{\sqrt{5}} (\mathbf{g}_2+\mathbf{g}_3) = \frac{2}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{4}\mathbf{g}^2+\mathbf{g}^3\right) .$$

A harmadik főirány kihasználva az $(1.27)_1$ képletet abból a feltételből adódik, hogy jobbsodratú kartéziuszi KR-t alkotnak a főirányok egységvektorai:

$$\underset{(3)}{\mathbf{n}} = \underset{(1)}{\mathbf{n}} \times \underset{(2)}{\mathbf{n}} = \frac{2}{\sqrt{5}} (\mathbf{g}_2+\mathbf{g}_3) \times \mathbf{g}_1 = \frac{2}{\sqrt{5}} \left(\varepsilon_{213}\mathbf{g}^3+\varepsilon_{312}\mathbf{g}^2\right) =$$
$$= \frac{2\sqrt{g_o}}{\sqrt{5}} \left(\mathbf{g}^2-\mathbf{g}^3\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\mathbf{g}^2-\mathbf{g}^3\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} (4\mathbf{g}_2-\mathbf{g}_3) .$$

4. A főtengelyek KR-ében

$$\boldsymbol{C} = \lambda_1 \underset{(1)}{\mathbf{n}} \circ \underset{(1)}{\mathbf{n}} + \lambda_2 \underset{(2)}{\mathbf{n}} \circ \underset{(2)}{\mathbf{n}} + \lambda_3 \underset{(3)}{\mathbf{n}} \circ \underset{(3)}{\mathbf{n}} =$$
$$= 16 \underset{(1)}{\mathbf{n}} \circ \underset{(1)}{\mathbf{n}} + \underset{(2)}{\mathbf{n}} \circ \underset{(2)}{\mathbf{n}} + \underset{(3)}{\mathbf{n}} \circ \underset{(3)}{\mathbf{n}}$$

a $\boldsymbol{C}$ tenzor diádikus alakja és

$$\boldsymbol{U} = 4 \underset{(1)}{\mathbf{n}} \circ \underset{(1)}{\mathbf{n}} + \underset{(2)}{\mathbf{n}} \circ \underset{(2)}{\mathbf{n}} + \underset{(3)}{\mathbf{n}} \circ \underset{(3)}{\mathbf{n}}$$

a tenzor négyzetgyöke, hiszen

$$\boldsymbol{U}^2 = \boldsymbol{C} .$$

5. Az is nyilvánvaló, hogy

$$\boldsymbol{U}^{-1} = \frac{1}{4} \underset{(1)}{\mathbf{n}} \circ \underset{(1)}{\mathbf{n}} + \underset{(2)}{\mathbf{n}} \circ \underset{(2)}{\mathbf{n}} + \underset{(3)}{\mathbf{n}} \circ \underset{(3)}{\mathbf{n}} .$$

6. Az (x) görbevonalú KR-re térve át írhatjuk, hogy

$$\boldsymbol{U} = \frac{16}{5} (\mathbf{g}_2+\mathbf{g}_3) \circ \left(\frac{1}{4}\mathbf{g}^2+\mathbf{g}^3\right) + \mathbf{g}_1 \circ \mathbf{g}^1 + \frac{1}{5} (4\mathbf{g}_2-\mathbf{g}_3) \circ \left(\mathbf{g}^2-\mathbf{g}^3\right) =$$
$$= \mathbf{g}_1 \circ \mathbf{g}^1 + \left\{\frac{4}{5} (\mathbf{g}_2+\mathbf{g}_3) + \frac{1}{5} (4\mathbf{g}_2-\mathbf{g}_3)\right\} \circ \mathbf{g}^2 +$$
$$+ \left\{\frac{16}{5} (\mathbf{g}_2+\mathbf{g}_3) - \frac{1}{5} (4\mathbf{g}_2-\mathbf{g}_3)\right\} \circ \mathbf{g}^3$$

azaz, hogy

$$\boldsymbol{U} = \mathbf{g}_1 \circ \mathbf{g}^1 + \left\{\frac{8}{5}\mathbf{g}_2 + \frac{3}{5}\mathbf{g}_3\right\} \circ \mathbf{g}^2 + \left\{\frac{12}{5}\mathbf{g}_2 + \frac{17}{5}\mathbf{g}_3\right\} \circ \mathbf{g}^3 .$$

Következésképp

$$\left[U^m{}_q\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{5} & \frac{12}{5} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{17}{5} \end{bmatrix},$$

és amint az némi számolással ellenőrzésként adódik:

$$\left[U^m{}_q U^q{}_n\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{5} & \frac{12}{5} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{17}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{5} & \frac{12}{5} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{17}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 12 \\ 0 & 3 & 13 \end{bmatrix} = \left[C^m{}_n\right].$$

Az is adódik behelyettesítések után, hogy

$$\begin{aligned} \boldsymbol{U}^{-1} &= \frac{1}{5}(\mathbf{g}_2+\mathbf{g}_3)\circ\left(\frac{1}{4}\mathbf{g}^2+\mathbf{g}^3\right)+\mathbf{g}_1\circ\mathbf{g}^1+\frac{1}{5}(4\mathbf{g}_2-\mathbf{g}_3)\circ\left(\mathbf{g}^2-\mathbf{g}^3\right) = \\ &= \mathbf{g}_1\circ\mathbf{g}^1+\left\{\frac{1}{20}(\mathbf{g}_2+\mathbf{g}_3)+\frac{1}{5}(4\mathbf{g}_2-\mathbf{g}_3)\right\}\circ\mathbf{g}^2+ \\ &\quad +\left\{\frac{1}{5}(\mathbf{g}_2+\mathbf{g}_3)-\frac{1}{5}(4\mathbf{g}_2-\mathbf{g}_3)\right\}\circ\mathbf{g}^3 \end{aligned}$$

azaz, hogy

$$\boldsymbol{U}^{-1} = \mathbf{g}_1\circ\mathbf{g}^1+\left\{\frac{17}{20}\mathbf{g}_2-\frac{3}{5}\mathbf{g}_3\right\}\circ\mathbf{g}^2+\left\{-\frac{3}{5}\mathbf{g}_2+\frac{2}{5}\mathbf{g}_3\right\}\circ\mathbf{g}^3$$

és

$$\left[\left(U^{-1}\right)^m{}_q\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{17}{20} & -\frac{3}{5} \\ 0 & -\frac{3}{20} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}.$$

Valóban

$$\left[U^k{}_s\left(U^{-1}\right)^s{}_l\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{5} & \frac{12}{5} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{17}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{17}{20} & -\frac{3}{5} \\ 0 & -\frac{3}{20} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. A forgató tenzor különböző alakjai pedig az alábbiak szerint számíthatók:

$$\left[R^k{}_l\right] = \left[F^k{}_s\left(U^{-1}\right)^s{}_l\right] = \begin{bmatrix} 0 & -0.8 & -1.2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 3.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{17}{20} & -\frac{3}{5} \\ 0 & -\frac{3}{20} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$[R_{nm}] = \left[g_{nk}R^k{}_m\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$[R_n{}^m] = [R_{ns}g^{sm}] = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$[R^{nm}] = \left[g^{np}R_p{}^m\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ellenőrzésként számítsuk ki az $\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R}^T$ szorzatot:

$$\left[R^k{}_r(R^T)^r{}_p\right]=\left[R^k{}_rR_p{}^r\right]=$$
$$=\begin{bmatrix}0&-0.5&0\\2&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0.5&0\\-2&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

Az (y) KR-ben

$$[R_{p\,q}]=\left[t_p{}^nR_{nm}t_q{}^m\right]=$$
$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-0.5&0\\0.5&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

a forgató tenzor.

8. Végezetül a $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{R}^T$ képlet alapján kapjuk, hogy

$$\left[V^k_l\right]=\left[F^k_s\,(R^T)^s{}_l\right]=\left[F^k_s\,R_l{}^s\right]=$$
$$=\begin{bmatrix}0&-0.8&-1.2\\2&0&0\\0&0.6&3.4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0.5&0\\-2&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.6&0&-1.2\\0&1&0\\-1.2&0&3.4\end{bmatrix},$$

amivel

$$\left[V^k_l\,V^l_s\right]=\begin{bmatrix}1.6&0&-1.2\\0&1&0\\-1.2&0&3.4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1.6&0&-1.2\\0&1&0\\-1.2&0&3.4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&0&-6\\0&1&0\\-6&0&13\end{bmatrix}.$$

Másrészről, mivel $\boldsymbol{V}^2=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F}^T$ mód van az ellenőrzésre is:

$$\left[F^k_s\,(F^T)^s{}_l\right]=\left[F^k_s\,F_l{}^s\right]=$$
$$=\begin{bmatrix}0&-0.8&-1.2\\2&0&0\\0&0.6&3.4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0.5&0\\-3.2&0&2.4\\-1.2&0&3.4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&0&-6\\0&1&0\\-6&0&13\end{bmatrix}.$$

Ezzel a feladatot megoldottuk.

B.8. 8. Fejezet

1. Gyakorlat: Megmutattuk az 5. Fejezet 10. Gyakorlatának megoldása során – a részleteket illetően lásd a 155 o.-t – hogy valódi tenzor két tenzor tenzoriális szorzata. Mivel valódi vektor az u^k és mivel a kérdéses $u^k{}_{;l}$ kovariáns derivált az $\mathbf{u}$ és nabla vektorok tenzoriális szorzata, akkor teljesül a jelen gyakorlat állítása, ha valódi vektor a ∇ vektor. Ennek igazolását illetően visszautalunk a (8.18) képletet követő bekezdésre.

2. Gyakorlat: Azt is megmutattuk az 5. Fejezet 10. Gyakorlatának megoldása során – a részleteket illetően ismét lásd a 155 o.-t – hogy valódi tenzor két tenzor skaláris szorzata. Az előző megoldás gondolatmenete alapján azonnal adódik, hogy valódi skalár az $u^k{}_{;k}$ divergencia (azaz az $\mathbf{u}$ és nabla vektorok skaláris szorzata).

3. Gyakorlat: Első esetben a $(8.34)_1$ képlet értelemszerű felhasználásával, ezt követően pedig a parciális deriválások végrehajtásával – alkalmazni kell eközben a (8.4) és (8.9) összefüggéseket is – jutunk eredményre:

$$\delta^k_{\ell\,;m}=\underbrace{\delta^k_{\ell\,,m}}_{\left(\mathbf{g}^k\cdot\mathbf{g}_\ell\right)_{,m}}+\delta^s_\ell\,\Gamma^k_{sm}-\delta^k_s\,\Gamma^s_{\ell m}=\underbrace{-\Gamma^k_{sm}\,\underbrace{\mathbf{g}^s\cdot\mathbf{g}_\ell}_{\delta^s_\ell}}_{-\Gamma^k_{\ell m}}+\underbrace{\Gamma^s_{\ell m}\,\underbrace{\mathbf{g}^k\cdot\mathbf{g}_s}_{\delta^k_s}}_{\Gamma^k_{\ell m}}+\Gamma^k_{\ell m}-\Gamma^k_{\ell m}=0\,.$$

Második esetben a $(8.34)_3$ és a (8.9) képletek felhasználásával kapható meg a kívánt eredmény:

$$g_{k\ell;m} = \underbrace{g_{k\ell,m}}_{(\mathbf{g}_k\cdot\mathbf{g}_\ell)_{,m}} - g_{s\ell}\Gamma^s_{km} - g_{ks}\Gamma^s_{\ell m} = \Gamma^s_{km}\underbrace{\mathbf{g}_s\cdot\mathbf{g}_\ell}_{g_{s\ell}} + \Gamma^s_{\ell m}\underbrace{\mathbf{g}_k\cdot\mathbf{g}_s}_{g_{ks}} - \Gamma^s_{km}g_{s\ell} - \Gamma^s_{\ell m}g_{ks} = 0\,.$$

4. Gyakorlat: A (8.39) egyenlet kapcsán részletezett lépésekkel – alkalmazni kell eközben a harmadrendű kovariáns tenzorok kovariáns deriváltját adó összefüggést (ez a (8.37) képlet értelemszerű felhasználásával adódik), a szorzatderiválás szabályát és a (8.9) képleteket – kapjuk, hogy

$$\varepsilon^{pqr}{}_{;m} = \underbrace{\varepsilon^{pqr}{}_{,m}}_{[\mathbf{g}^p\mathbf{g}^q\mathbf{g}^r]_{,m}} + \Gamma^p_{sm}\varepsilon^{sqr} + \Gamma^q_{sm}\varepsilon^{psr} + \Gamma^r_{sm}\varepsilon^{pqs} =$$
$$= -\Gamma^p_{sm}\underbrace{[\mathbf{g}^s\mathbf{g}^q\mathbf{g}^r]}_{\varepsilon^{sqr}} - \Gamma^q_{sm}\underbrace{[\mathbf{g}^p\mathbf{g}^s\mathbf{g}^r]}_{\varepsilon^{psr}} - \Gamma^r_{sm}\underbrace{[\mathbf{g}^p\mathbf{g}^q\mathbf{g}^s]}_{\varepsilon^{pqs}} + \Gamma^p_{sm}\varepsilon^{sqr} + \Gamma^q_{sm}\varepsilon^{psr} + \Gamma^r_{sm}\varepsilon^{pqs} = 0\,.$$

5. Gyakorlat: Első esetben szinte szószerint követjük a $(8.40)_1$ összefüggés igazolásának gondolatmenetét. Nyilvánvaló, hogy zérus a tetszőleges de egyébként állandó $\mathbf{a} = a^p\mathbf{g}_p$ és $\mathbf{b} = b^q\mathbf{g}_q$ ($|\mathbf{a}| \neq 0$, $|\mathbf{b}| \neq 0$ és $\mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$) vektorok kovariáns deriváltja:

$$a^p_{\,;m} = 0\,, \qquad\qquad b^q_{\,;m} = 0\,.$$

Képezzük, kihasználva a szorzatderiválás szabályát a két vektor $c_r = \varepsilon_{pqr}\,a^p\,b^q$ vektoriális szorzatának kovariáns deriváltját. Mivel állandó a $\mathbf{c}$ vektor teljesülnie kell a

$$c_{r\,;m} = (\varepsilon_{pqr}\;a^p\,b^q)_{\,;r} =$$
$$= \varepsilon_{pqr\,;m}\,a^p\,b^q + \varepsilon_{pqr}\underbrace{a^p_{\,;m}}_{=0}b^q + \varepsilon_{pqr}\,a^p\underbrace{b^q_{\,;m}}_{=0} = \underline{\varepsilon_{pqr\,;m}\;a^p\,b^q} = 0$$

egyenletnek. Az aláhúzott tag csak akkor tűnik el tetszőleges a^p és b^q esetén, ha

$$\varepsilon_{pqr\,;m} = 0\,.$$

Ezt kellett igazolni.

Második esetben a (8.39) egyenlet kapcsán részletezett lépésekkel – alkalmazni kell eközben a harmadrendű kovariáns tenzorok kovariáns deriváltját adó összefüggést (ez a (8.37) képlet értelemszerű alkalmazásával írható fel), a szorzatderiválás szabályát és a (8.9) képleteket – kapjuk, hogy

$$\varepsilon_{k\ell r;m} = \underbrace{\varepsilon_{k\ell r;m}}_{[\mathbf{g}_k\mathbf{g}_\ell\mathbf{g}_r]_{,m}} - \Gamma^s_{km}\varepsilon_{s\ell r} - \Gamma^s_{\ell m}\varepsilon_{ksr} - \Gamma^s_{rm}\varepsilon_{k\ell s} =$$
$$= \Gamma^s_{km}\underbrace{[\mathbf{g}_s\mathbf{g}_\ell\mathbf{g}_r]}_{\varepsilon_{s\ell r}} + \Gamma^s_{\ell m}\underbrace{[\mathbf{g}_k\mathbf{g}_s\mathbf{g}_r]}_{\varepsilon_{ksr}} + \Gamma^s_{rm}\underbrace{[\mathbf{g}_k\mathbf{g}_\ell\mathbf{g}_s]}_{\varepsilon_{k\ell s}} - \Gamma^s_{km}\varepsilon_{s\ell r} - \Gamma^s_{\ell m}\varepsilon_{ksr} - \Gamma^s_{rm}\varepsilon_{k\ell s} = 0\,.$$

Vegyük észre, hogy ez az igazolás szinte szószerint megegyezik az előző gyakorlatban közölt igazolással.

6. Gyakorlat: Ha zérus a térgörbe $\kappa(s)$ görbülete akkor fennáll a $(8.79)_1$ képlet szerint, hogy

$$\kappa\mu^l = \frac{\delta\lambda^l}{\delta s} = 0\,.$$

Ez azt jelenti, hogy állandó a görbe $\boldsymbol{\lambda}$ érintője, azaz

$$\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}_\circ = \boldsymbol{\lambda}\,s$$

alakú szimbolikus írásmódban a görbe egyenlete – $\mathbf{r}_\circ$ a görbe $s = 0$ pontjához tartozó helyvektor. Ez egyenes egyenlete paraméteres alakban, a paraméter pedig az s ívkoordináta.

7. Gyakorlat: Megmutatjuk, hogy a kérdéses zérus torziójú ($\tau = 0$) térgörbe az

$$\mathbf{r}(\xi^1, \xi^2) = \mathbf{r}_\circ + \xi^1 \boldsymbol{\lambda}(s_\circ) + \xi^2 \boldsymbol{\mu}(s_\circ)$$

egyenletű síkban fekszik – ξ^1 és ξ^2 a sík egyenletének két paramétere, $\mathbf{r}_\circ$ a térgörbe $s_\circ$ ívkoordinátához tartozó pontja, $\boldsymbol{\lambda}(s_\circ)$ és $\boldsymbol{\nu}(s_\circ)$ ugyanitt az érintő és a főnormális. Nyilvánvaló, hogy az s ívkoordinátához tartozó görbepont helyvektora a

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}_\circ + \int_{s_\circ}^{s} \boldsymbol{\lambda}(s)\,\mathrm{d}s$$

képlettel számítható. Tekintsük az $s_\circ$ ponthoz kötöttnek gondolt és az ottani kísérő triéder által kifeszített KR-t: a

$$\mathbf{g}_1 = \boldsymbol{\lambda}(s_\circ)\,, \qquad \mathbf{g}_2 = \boldsymbol{\mu}(s_\circ)\,, \qquad \mathbf{g}_3 = \boldsymbol{\nu}(s_\circ)$$

vektorok ortogonális egységbázist feszítenek ki. Jelölje α^i az erre a bázisra vonatkoztatott koordinátákat. Ebben a KR-ben

$$\boldsymbol{\lambda}(s) = \alpha^i(s)\,\mathbf{g}_i$$

a görbe érintő egységvektora. Vegyük észre, hogy a harmadik Frenet-féle képlet szerint – lásd a (8.89) összefüggést

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\nu}(s)}{\mathrm{d}s} = -\tau\boldsymbol{\mu}(s) = \mathbf{0}, \qquad \text{azaz} \qquad \boldsymbol{\nu}(s) = \boldsymbol{\nu}(s_\circ)\,.$$

Következésképp $\boldsymbol{\lambda}(s)\cdot\boldsymbol{\nu}(s_\circ) = \boldsymbol{\lambda}(s)\cdot\mathbf{g}_3 = 0$, vagyis

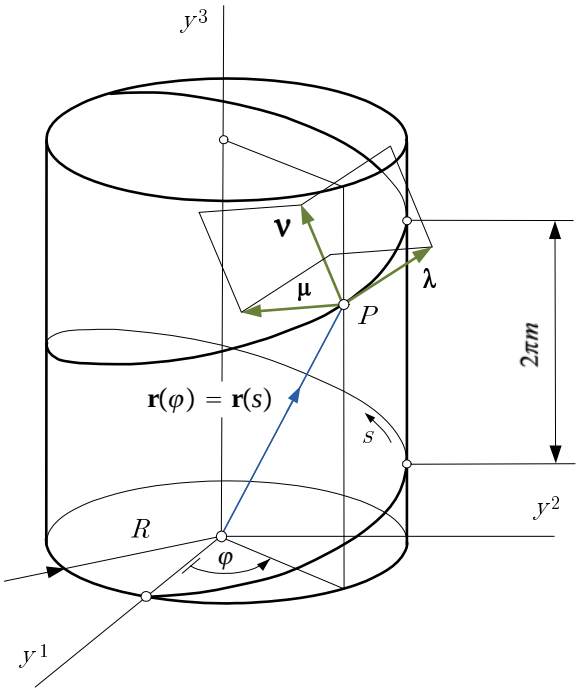
$$\boldsymbol{\lambda}(s) = \alpha^1(s)\,\mathbf{g}_1 + \alpha^2(s)\,\mathbf{g}_2 = \alpha^1(s)\,\boldsymbol{\lambda}(s_\circ) + \alpha^2(s)\,\boldsymbol{\mu}(s_\circ)\,,$$

amivel

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}_\circ + \boldsymbol{\lambda}(s_\circ)\underbrace{\int_{s_\circ}^{s} \alpha^1(s)\,\mathrm{d}s}_{\xi^1(s)} + \boldsymbol{\mu}(s_\circ)\underbrace{\int_{s_\circ}^{s} \alpha^1(s)\,\mathrm{d}s}_{\xi^1(s)}\,.$$

Az utóbbi összefüggésből azonnal következik a gyakorlat állítása.

8. Gyakorlat: A kérdéses csavarvonalat az A.1. ábra szemlélteti. Az ábra $m > 0$ esetén szemlélteti a viszonyokat.



A.1. ábra.

A (8.90) képlet alapján írható, hogy

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}\varphi} = -R\sin\varphi\,\mathbf{i}_1 + R\cos\varphi\,\mathbf{i}_2 + m\mathbf{i}_3\,, \qquad \left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}\varphi}\right| = \sqrt{R^2+m^2} = \text{állandó}\,.$$

Figyelembe véve másrészről, hogy

$$\mathrm{d}s = \left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}\varphi}\right|\mathrm{d}\varphi$$

kapjuk, hogy

$$\mathrm{d}s = \sqrt{R^2+m^2}\mathrm{d}\varphi, \qquad \varphi(s) = \int_{s_o=0}^{s}\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{R^2+m^2}} = \frac{s}{\sqrt{R^2+m^2}}\,.$$

Az utóbbi összefüggések szerint

$$\mathbf{r}(s) = R\cos\frac{s}{\sqrt{R^2+m^2}}\,\mathbf{i}_1 + R\sin\frac{s}{\sqrt{R^2+m^2}}\,\mathbf{i}_2 + \frac{ms}{\sqrt{R^2+m^2}}\mathbf{i}_3\,,$$

amivel

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\sqrt{R^2+m^2}}\left(-R\sin\frac{s}{\sqrt{R^2+m^2}}\,\mathbf{i}_1 + R\cos\frac{s}{\sqrt{R^2+m^2}}\,\mathbf{i}_2 + m\,\mathbf{i}_3\right)$$

az érintőirányú egységvektor. A $(8.79)_1$ képlet alapján írható, hogy

$$\kappa\mu = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}}{\mathrm{d}s} = -\frac{R}{R^2+m^2}\left(\cos\frac{s}{\sqrt{R^2+m^2}}\,\mathbf{i}_1 + \sin\frac{s}{\sqrt{R^2+m^2}}\,\mathbf{i}_2\right)$$

ahonnan azonnal adódik a κ görbület és a ρ görbületi sugár

$$\kappa = \frac{R}{R^2+m^2}\,, \qquad \rho = R + \frac{m}{R^2}\,.$$

$m=0$-ra megegyezik a ρ a körhenger R sugarával. Végezetül a (8.86) és (8.89) képletek alapján

$$\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\lambda}\times\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{\sqrt{R^2+m^2}}\begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ -R\sin\frac{s}{\sqrt{R^2+m^2}} & R\cos\frac{s}{\sqrt{R^2+m^2}} & m \\ -\cos\frac{s}{\sqrt{R^2+m^2}} & -\sin\frac{s}{\sqrt{R^2+m^2}} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= m\sin\frac{s}{\sqrt{R^2+m^2}}\,\mathbf{i}_1 - m\cos\frac{s}{\sqrt{R^2+m^2}}\,\mathbf{i}_2 + R\,\mathbf{i}_3$$

a binormális és fennáll, hogy

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\nu}}{\mathrm{d}s} = \underbrace{\frac{m}{\sqrt{R^2+m^2}}}_{\tau}\boldsymbol{-\mu}\underbrace{\left(\cos\frac{s}{\sqrt{R^2+m^2}}\,\mathbf{i}_1 + \cos\frac{s}{\sqrt{R^2+m^2}}\,\mathbf{i}_2\right)}_{} = -\tau\boldsymbol{\mu}$$

miszerint

$$\tau = \frac{m}{\sqrt{R^2+m^2}}$$

a torzió értéke.

Irodalomjegyzék

[1] A. J. McConnel: *Applications of Tensor Analysis*. Dover Publications, Inc., New York, 1957.

[2] J. L. Synge, A. Schild: *Tensor Calculus*. Dover Publications, Inc., New York, 1969.

[3] I. S. Sokolnikoff: *Tensor Analzsis: Theory and applications to Geometry and Mechanics of Continua*, Nauka, Moszkva, 1971. (orosznyelvu kiadás)

[4] M. A. Akivis, V. V. Goldberg: *An Introduction to Linear Algebra and Tensors*, Dover Publications, Inc., New York, 1977.

[5] Béda Gy., Kozák I., Verhás J.: *Kontinuummechanika*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1986. 227-262 o.

[6] G. Béda, I. Kozák., J. Verhás: *Continuum Mechanics*. Akadémiai Könyvkiadó, Budapest, 1995.

[7] D. S. Chanderasekharaiah, Lokenath Debnath: *Continuum mechanics*. Academic Press, 1994. 1-154. o.

[8] Gerhard A. Holzapfel: *Nonlinear Solid Mechanics*. John Wiley and Sons, Chichester, Wenheim, New York, Brisbane, Singapure, Toronto 2000. 1-52 o.

[9] Balázs Tóth: *Three-field dual-mixed variational formulation and hp finite element model for elastodynamic analysis of axisymmetric shells*, István Sályi Doctoral School, Department of Mechanics, University of Miskolc, Hungary, 2012, pp. 1-102.

Tárgymutató

A, Á

abszolút derivált **94**, 95–98
adjungált 23, 24, **25**, 59, 63
alsóindexes sokaság 15
alsóindexes számhármas 15

B

baloldali divergencia 87
baloldali gradiens **87**, 88
baloldali poláris felbontás **78**, 79
baloldali rotáció 88
bázisvektor(ok) **4**, 5, 6, 17, 19, 30, 32, 33
bázisvektorok deriváltjai 83
bázisvektorok transzformációja 35
bázisvektorok transzformációs képletei 35
bázisvektorok vegyes szorzata 26
binormális **97**, 172

C

Cayley-Hamilton tétel **65**, 66, 69
Christoffel szimbólum **83**, 84, 85

Cs

csavarvonal **98**, 171

D

determináns **23**, 26, 41, 102, 110
determinánsok szorzástétele 25, **26**, 27, 34, 56, 72, 120
deviátor 67
deviátortenzor **67**, 68
diádikus szorzás 20
diádikus szorzat **1**, 2, 20, 31, 37
diszkrimináns 57

E, É

egyenletrendszer determinánsa 56
egységtenzor **17**, 31, 71
Einsten-féle összegezési konvenció **7**
elfajuló leképezés 29
elliptikus pont 113
elsőfajú Christoffel szimbólum **83**, 85
első skalárinvariáns **53**, 67
epszilon tenzor 17, 91
epszilon tenzorok kovariáns deriváltjai 90

F

felbontási tétel 50
felsőindexes sokaság 15
felsőindexes számhármas 15
felületi epszilon tenzor 102
felületi kovariáns deriválások sorrendje 120
felületi kovariáns derivált **115**, 117
felületi metrikus tenzor 112
felület menti kovariáns derivált **114**, 116
felületre épített KR 99
ferdeszimmetrikus tenzor 50
ferdeszögű KR **5**, 15, 30
fizikai koordináták **45**, 47, 155
fizikai koordináták, baloldali 46
fizikai koordináták, jobboldali 46
forgásfelület **142**, 143
főgörbületek **110**, 112
főgörbületi sugarak 111
főirány(ok) 55
főirányok számítása 57
főnormális 97
fősík 55
főtengelytétel 60

G

Gauss-Codazzi-féle egyenlet 120
Gauss-féle görbület **110**, 112, 120
Gauss-Osztrogradszkij tétel 128
gömbfelület **133**, 135
gömbi KR 12
gömbi tenzor 60, 67, **68**
görbevonalú (kontravariáns) koordináták 10
görbevonalú KR 6, **10**, 11, 30, 31
görbületi tenzor 102, **104**, 105, 111, 112
görbületi tenzor főirányai 110
görbületi vonalak 111
Green tétel 128

Gy

gyökvonás 64

H

háromindexes sokaság 17
hengerfelület **131**
hengerfelület(en) 132
henger KR 12

hiperbolikus pont 113

I, Í

indexátnevező operátor **7**, 17, 27, 31, 41
indexemelés 17, **18**, 19, 24, 103
indexes jelölés 83
indexsüllyesztés **18**, 19, 24
inverz 24
izotróp tenzor 60

J

Jacobi-féle függvénydeterminánsok 10
jobboldali divergencia 87
jobboldali gradiens 88
jobboldali poláris felbontás **78**, 79
jobboldali rotáció 88

K

karakterisztikus egyenlet 56
karakterisztikus polinom 55
karakterisztikus tér 60
kartéziuszi KR **2**, 6, 29, 31, 32, 56
képvektor(ok) **29**, 71
kétindexes objektum 16
kétszeres vektoriális szorzat 2
két tenzor általános szorzata 44
két tenzor diádikus szorzata 44
kettős kontrakció 54
kettős skaláris szorzás 54
kifejtési tétel **2**, 7
kisérő triéder **97**
koaxiális tenzorok 67
kontravariáns bázis **6**, 12
kontravariáns bázisvektorok **6**, 100
kontravariáns bázisvektorok szorzatai 16
kontravariáns bázisvektorok transzformációja 34
kontravariáns metrikus tenzor szerkezete 100
koordináta-felület(ek) 11
koordináta-vonal(ak) 11
kovariáns bázis **5**, 12
kovariáns bázisvektorok **5**, 99
kovariáns bázisvektorok szorzatai 16
kovariáns bázisvektorok transzformációja 31
kovariáns derivált 88
kovariáns metrikus tenzor szerkezete 100
középgörbület 110
közös főtengelyű tenzorok 67
Kronecker delta **6**, 32, 62, 100
Kronecker szimbólum **6**, 9, 84, 105
Kronecker szimbólum mátrixa 72
kúpfelület **136**, 137, 138

L

Lagrange-féle multiplikátor 110
Laplace operátor **91**
leképezés 29
lokális bázis **12**

M

másodfajú Christoffel szimbólum **83**, 84, 85
másodrendű sokaság 16
másodrendű tenzor inverze 54
másodrendű tenzor normája 54
másodrendű tenzor nyoma 53
másodrendű tenzorok fizikai koordinátái **46**
másodrendű tenzorok hatványai 64
másodrendű tenzorok transzformációja 36
meridiángörbe **142**, 142
metrikus tenzor **17**, 26, 31, 32, 45, 46, 71, 72, 84, 90, 92, 101, 102, 118
metrikus tenzorok kovariáns deriváltjai 90

N

nabla operátor 87
negatív definit 51
negatív szemidefinit 51
néma index **7**, 37
néma indexpár 19
nem elfajuló leképezés 29
norma 54
normálmetszetbeli görbület 110

O, Ó

ortogonális tenzorok 71

Ö, Ő

összefüggés az invariánsok között 63
összegezési konvenció **7**, 17
összegező index 7

P

parabolikus pont 113
parciális integrálási szabály 129
permutációs szimbólum 7, **8**, 17, 23, 26, 100
permutációs szimbólumok szorzatai 9
poláris felbontási tétel 78
polárszög 142
pozitív definit **51**, 57, 64, 78
pozitív szemidefinit 51
pszeudotenzor **42**, 46, 154

R

reciprok bázisvektor(ok) **4**
rendezett sokaság 15
Riemann-Christoffel-féle görbületi tenzor **91**, 92

S

sajátértékek multiplicitása 61
Schwartz féle egyenlőtlenség 68, 158
simulósík 97
skalárinvariánsok **56**, 62, 66
Stokes tétel 123, **126**, 127, 129

Sz

szabad index **7**, 11, 17, 19, 42
szimmetrikus tenzor 50

szögtartó leképezés 72

T

tárgyvektor(ok) 29
távolságtartó leképezés 71
tenzor deviátoros része 68
tenzor gömbi (szférikus) része 68
tenzoriális szorzat 37
tenzorok transzformációja 31
tenzorpolinom(ok) 66
tenzor transzponáltja 49
tenzor transzponáltjának determinánsa 50
tenzor transzponáltjának inverze 55
térgörbe geometriája 95
térgörbe görbülete 97
térgörbe görbületi sugara 97
tóruszfelület **139**, 141
torzió **98**
transzponálás **50**, 68

V

valódi másodrendű tenzor **39**
valódi skalár **39**, 41, 43, 44, 47, 68, 98
valódi tenzor 8, 40–42, 44–46, 155
valódi vektor **39**
véges forgatás 75
véges forgatás tenzora 75
vegyes szorzat **1**, 9, 20
vektoriális szorzás 19
vektorinvariáns **52**, 53, 68, 72
vektormező divergenciája 88
vektormező gradiense 88
vektor normája 54
vektorok fizikai koordinátái **45**